

Méthode itérative pour les systèmes linéaires:

Référence: [Zienmann][Cicalel]

Énoncé : Lemme 1: Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$ alors il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que sa norme subordonnée $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{C})$ vérifie $\|A\| < \rho(A) + \varepsilon$.

Théorème 1: Soit $Ax = b$ avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. L'unique solution du système est $x = A^{-1}b$.

On suppose que A se décompose sous la forme $A = M - N$ avec $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $N \in M_n(\mathbb{R})$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ on définit alors la suite des itérés (x_k) par récurrence $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$. Alors $(x_k)_{k \geq 0}$ converge vers x pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Théorème 2: Si A est hermitienne définie positive décomposée en $A = M - N$ avec $M \in GL_n(\mathbb{C})$. Si $(M^* + N)$ est hermitienne définie positive alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Étapes:

(E1) Lemme avec $D_\delta = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \delta & \\ & & \delta^{n-1} \end{pmatrix}$

(E2) Théorème 1 (à combiner avec vecteur $x \in \mathbb{R}^n$!)

(E3) Théorème 2 (se servir de la norme hermitienne associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$).

⑦1 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, soit $\varepsilon > 0$, on veut construire une norme $\|\cdot\|$ telle que $\|A\| < \rho(A) + \varepsilon$.

Pour cela on va chercher à "tuer" les coef. extra diagonaux de A .

$A \in M_n(\mathbb{C})$ donc A est trigonalisable donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & t_{n-1,n} & \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix}$ (avec $t_{ii} = \lambda_i \forall i, \lambda_i \in \text{Sp}(A)$)

Soit $\delta > 0$, on pose $D_\delta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \delta & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta^{n-1} \end{pmatrix}$ on a $D_\delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \delta^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta^{-(n-1)} \end{pmatrix}$

on a alors

$$D_\delta^{-1} P^{-1} A P D_\delta = \begin{pmatrix} t_{11} & \delta t_{12} & \dots & \delta^{n-1} t_{1n} \\ & t_{22} & \delta t_{23} & \dots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & t_{nn} \end{pmatrix} = T_\delta$$

on définit alors la norme $\|\cdot\|_\delta : x \in \mathbb{C}^n \mapsto \|D_\delta^{-1} P^{-1} x\|_\infty$

$$\text{on a alors } \|A\|_\delta = \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ x \neq 0}} \left(\frac{\|D_\delta^{-1} P^{-1} A x\|_\infty}{\|D_\delta^{-1} P^{-1} x\|_\infty} \right)$$

$$= \sup_{\substack{y \in \mathbb{C}^n \\ y \neq 0}} \left(\frac{\|D_\delta^{-1} P^{-1} A P D_\delta y\|_\infty}{\|D_\delta^{-1} P^{-1} P D_\delta y\|_\infty} \right)$$

$$= \sup_{\substack{y \in \mathbb{C}^n \\ y \neq 0}} \left(\frac{\|T_\delta y\|_\infty}{\|y\|_\infty} \right) = \|T_\delta\|_\infty \stackrel{(+)}{=} \sup_{i \in [1, n]} \left(\sum_{j=1}^n |t_{i,j}| \right)$$

$$\text{Donc } \|A\|_\delta = \max_i \left(|\lambda_i| + \sum_{j=i+1}^n \delta^{j-i} |t_{i,j}| \right)$$

$$= \max_i \left(|\lambda_i| + \delta \left(\sum_{j=i+1}^n \delta^{j-(i+1)} |t_{i,j}| \right) \right)$$

En choisissant δ suffisamment petit pour que $\forall i \in [1; n] \quad \delta \left(\sum_{j=i+1}^n \delta^{j-(i+1)} |t_{i,j}| \right) < \varepsilon$ on a alors

$$\|A\|_\delta < \max_i (|\lambda_i|) + \varepsilon = \rho(A) + \varepsilon. \quad \square$$

(E2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\exists ! x \in \mathbb{R}^n$ tq $Ax = b$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, mq la suite définie par récurrence par:

$\forall k \in \mathbb{N} \quad x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$ converge vers x si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

$\forall k \in \mathbb{N}$ on construit le vecteur $e_k = x_k - x$.

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x \quad \text{si} \quad e_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, e_{k+1} &= M^{-1}(Nx_k + b) - x = M^{-1}(Nx_k + Ax) - x \\ &= M^{-1}(Nx_k + (M - N)x) - x \\ &= x + M^{-1}Nx_k - M^{-1}Nx - x \\ &= M^{-1}N(x_k - x) = M^{-1}N e_k \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall k \in \mathbb{N}, e_k = (M^{-1}N)^k e_0$$

$$\text{Donc } e_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{si} \quad (M^{-1}N)^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ Soit $\|\cdot\|$ une norme telle que $\|M^{-1}N\| < \rho(M^{-1}N) + \varepsilon$

Lemme: $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Preuve: $\|AB\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \left(\frac{\|ABx\|}{\|x\|} \right)$

si $Bx \neq 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \quad \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \underbrace{\frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}}_{\leq \|A\|} \times \underbrace{\frac{\|Bx\|}{\|x\|}}_{\leq \|B\|} \leq \|A\| \|B\|$$

si $Bx = 0$ cette inégalité reste vraie

donc $\forall k \in \mathbb{N}, \|e_k\| \leq \|M^{-1}N\|^k \|e_0\|$

donc si $\|M^{-1}N\| < 1$, cette suite converge.

Ceci implique $\rho(M^{-1}N) + \varepsilon \leq 1$

donc si $\rho(M^{-1}N) < 1$, en prenant $\varepsilon = 1 - \rho(M^{-1}N) > 0$ on a ce qu'il faut.

$\Leftarrow$ par contraposée, mqr si $\rho(M^{-1}N) \geq 1$ alors $(M^{-1}N)^k \not\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$

si $\rho(M^{-1}N) \geq 1$ alors $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tq $|\lambda| \geq 1$ et donc

$$\exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \text{ tq } M^{-1}N x = \lambda x$$

donc $\forall k \in \mathbb{N}, (M^{-1}N)^k x = \lambda^k x \not\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ car $|\lambda| \geq 1$.

on veut alors se ramener à un x réel.

si $x = u + iv$, pour $k \in \mathbb{N}, (M^{-1}N)^k x = (M^{-1}N)^k u + i(M^{-1}N)^k v$

$(u, v) \in \mathbb{R}^n$. Comme $(M^{-1}N)^k \not\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, alors $((M^{-1}N)^k u)_{k \geq 0}$

ou $((M^{-1}N)^k v)_{k \geq 0}$ ne tend pas vers 0.

donc en prenant $x_0 = x + v$ ou $x_0 = x + u$ alors

$e_k = (M^{-1}N)^k v$ ne converge pas vers 0 donc $e_k \not\xrightarrow{} x$.

③ Si A est hermitienne définie positive décomposée en $A = M - N$ et ${}^t\bar{M} + N$ est définie positive, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$
 $A = M - N$ avec $M \in \text{GL}(\mathbb{C})$,

On considère la norme $\|\cdot\|_A : x \in \mathbb{C}^n \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle_A}$ où
 $\langle x, y \rangle_A = {}^t\bar{x} A y$ qui est un produit hermitien
 car A est hermitienne définie positive.

On note $\|\cdot\|_A$ la norme subordonnée.

$$\|M^{-1}N\|_A = \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ x \neq 0}} \left(\frac{\|M^{-1}N x\|_A}{\|x\|_A} \right) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|_A = 1}} (\|x - M^{-1}A x\|_A)$$

car $M^{-1}N = M^{-1}(M - A) = I_n - M^{-1}A$.

Comme $f : x \in \{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_A = 1\} \mapsto \|x - M^{-1}A x\|_A$ est
 continue sur B_1 , elle y est bornée et atteint sa borne.
 Il reste donc à mg $\forall x \in \mathbb{C}^n$ tq $\|x\|_A = 1$, $\|x - M^{-1}A x\|_A < 1$.

Soit $x \in \mathbb{C}^n$, on pose $w = M^{-1}A x$.

$$\|x - w\|^2 = \|x\|^2 - {}^t\bar{x} A w - {}^t\bar{w} A x + \|w\|_A^2$$

$$= 1 - \underbrace{{}^t\bar{x} A} = {}^t\bar{w} \underbrace{{}^t\bar{M}^{-1}} = {}^t\bar{M} w - {}^t\bar{w} \underbrace{M M^{-1} A x}_= w + {}^t\bar{w} A w$$

$$= 1 - {}^t\bar{w} {}^t\bar{M} w - {}^t\bar{w} M w + {}^t\bar{w} A w = 1 - {}^t\bar{w} ({}^t\bar{M} + M - A) w$$

Donc $\|x - w\|_A = 1 - {}^t\bar{w} ({}^t\bar{M} + N) w$

↙ hermitienne définie positive

Mq ${}^t\bar{M} + N$ est hermitienne.

$${}^t\bar{M} + N = {}^t(\overline{A+N}) + N = {}^t\bar{A} + {}^t\bar{N} + N = A + N + {}^t\bar{N} = M + {}^t\bar{N}$$

donc ${}^t\bar{M} + N$ est hermitienne.

Donc ${}^t\bar{\omega}({}^t\bar{M} + N)\omega > 0$ car $\omega = M^{-1}Ax \neq 0$ car $x \neq 0$ et

$M^{-1}A \in GL_n(\mathbb{C})$.

Donc $\|x - \omega\|_A < 1$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\|_A = 1$.

Donc $\sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|_A = 1}} (\|x - M^{-1}Ax\|_A) < 1$. Donc $\rho(M^{-1}N) \leq \|M^{-1}N\|_A < 1$.

Compléments:

$$(*) \quad \|T\|_\infty = \sup_i \left(\sum_{j=1}^n |t_{i,j}| \right)$$

$$\|T\|_\infty = \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ x \neq 0}} \left(\frac{\|Tx\|_\infty}{\|x\|_\infty} \right) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|=1}} (\|Tx\|_\infty) = \sup_{\substack{(a_i) \in \mathbb{C}^n \\ a_i \in [0,1] \\ \exists i_0 \text{ } a_{i_0}=1}} \left(\max_i \sum_{j=1}^n |a_j t_{i,j}| \right)$$

$$\leq \max_i \left(\sum_{j=1}^n |t_{i,j}| \right)$$

et en prenant $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ $\|T\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |t_{i,j}| \right)$