Nombre de dérangements :

Référence : [Gourdon Algèbre 3e édition]

Énoncé : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des dérangements d'un ensemble à n éléments, c-à-d les permutations sans point fixe. Alors $\#(\mathcal{D}_n) = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$

Étapes :

(E1) Mq $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$ où $d_k = \#(\mathcal{D}_k)$ avec la convention $d_0 = 1$

(E2) Mq $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

(E3) $d_n = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{n!}{e} \right\rfloor$

(E1) Mq $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$

$\forall k \in [\![0;n]\!]$ on note $\mathcal{F}_k$ l'ensemble des permutations qui ont exactements k points fixes.

Alors $\bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{F}_k = \mathfrak{S}_n$ et cette union est disjointe.

Ainsi les $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$ forment une partition de $\mathfrak{S}_n$.

Donc $\#(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k=0}^{n} \#(\mathcal{F}_k)$

- Si $k \in [\![0;n-1]\!]$

$$\#(\mathcal{F}_k) = \binom{n}{k} \#(\mathcal{D}_{n-k}) = \binom{n}{k} d_{n-k}$$

choix des points fixes

ensemble des dérangements d'un ensemble à $n-k$ éléments

- Si $k=n$, $\mathcal{F}_n$ est l'ensemble des permutations qui fixent tous les points $\mathcal{F}_n = \{id\}$. On prend la convention $d_0 = 1$

on a alors $\#(\mathcal{F}_n) = \binom{n}{n} d_0 = 1$

Donc $n! = \#(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$

Comme $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on en conclut :

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} d_{n-k} = \sum_{k'=0}^{n} \binom{n}{k'} d_{k'}$$

(E2) Établir que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} d_k \quad \text{donc} \quad 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!}$$

On sent poindre un produit de Cauchy entre $\underbrace{\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n}$ et $\underbrace{\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n}_{}$

série exponentielle de rayon de convergence infini.

$\forall n \geq 1$, d_n est le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments. $d_n = \#(\mathcal{D}_n)$.

or $\mathcal{D}_n \subset \mathfrak{S}_n \setminus \{id_E\}$ donc $\#(\mathcal{D}_n) < \#(\mathcal{D}_n)$

donc $\frac{d_n}{n!} < 1$ et $\frac{d_0}{0!} = 1$

donc $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{d_n}{n!} z^n\right| \leq |z|^n \leq 1$

donc $\left(\left|\frac{d_n}{n!} z^n\right|\right)_{n \geq 0}$ est bornée et donc $R \geq 1$.

Donc $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ converge absolument donc on peut faire le produit de Cauchy des deux séries pour tout $|z| < 1$.

$$\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} z^n\right)}_{= \mathcal{D}(z)} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} z^k \frac{z^{n-k}}{(n-k)!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right)}_{= 1 \ \forall n \in \mathbb{N}} z^n \right)$$

Donc $\mathcal{D}(z) = e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-z)^k}{k!} \times z^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) z^n \right)$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) z^n$$

donc par identification des coefficients (zéros isolés) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

E3 Mq $d_n = \left\lfloor \dfrac{n!}{e} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \times \frac{1}{e} - n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

donc

$$\left| d_n - \frac{n!}{e} \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$$

$$< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots$$

$$\leqslant \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^p} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} - 1$$

$$= \frac{n+1}{n+1-1} - 1 = \frac{1}{n}$$

donc $\left| d_n - \frac{n!}{e} \right| < \frac{1}{2}$ quand $n \geqslant 2$, donc

$$\frac{n!}{e} - \frac{1}{2} < d_n < \frac{1}{2} + \frac{n!}{e}$$

et $d_n < \frac{1}{2} + \frac{n!}{e} < d_n + 1$ donc $d_n = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{n!}{e} \right\rfloor$

=0 convention

Ce qui reste vrai pour $n=0$ et $n=1$. □

Compléments

(+) produit de Cauchy

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ deux séries absolument convergentes,

alors $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) =$

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \left\|\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} \|a_k\| \, \|b_{n-k}\|$$

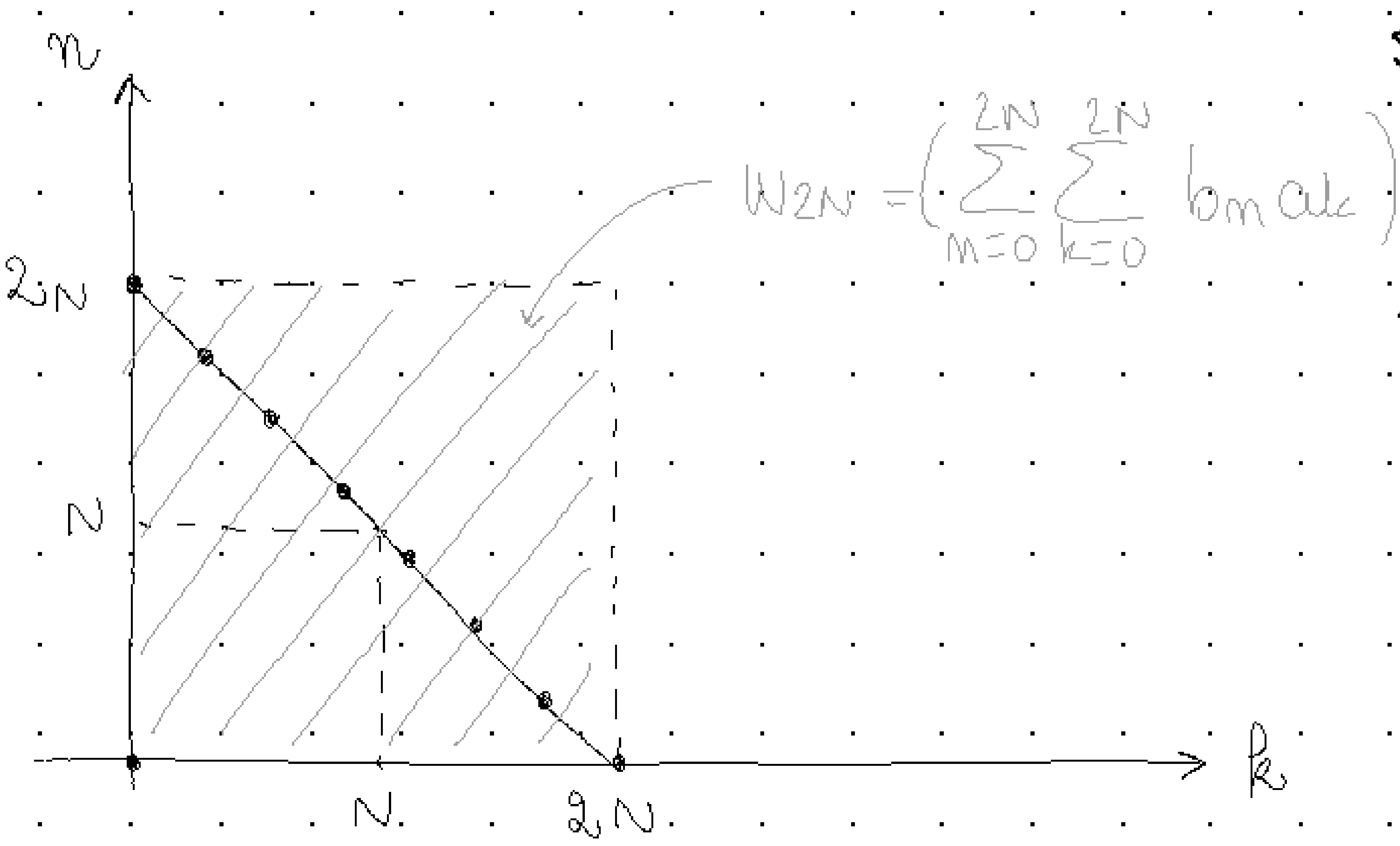
$$\leqslant \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} \|a_k\| \, \|b_{n-k}\|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N} \|a_k\| \, \|b_{n-k}\|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{N-k} \|a_k\| \, \|b_n\|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} \|a_k\| \, \|b_n\|$$

$$\leqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \|a_k\|}_{cv} \; \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \|b_n\|}_{cv}$$



donc $\sum_{n \geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$ converge

Étudions $\sum_{n=0}^{2N}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) - \left(\sum_{k=0}^{N} a_k\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) = \Delta_N$

Donc $\Delta_N = \sum_{k=0}^{2N}\left(\sum_{n=k}^{2N} a_k b_{n-k}\right) - \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} a_k b_n$

$\Delta_N = \sum_{k=0}^{2N}\left(\sum_{n=0}^{2N-k} a_k b_n\right) - \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} a_k b_n$

$\Delta_N = \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{2N-k} a_k b_n + \sum_{k=N+1}^{2N}\sum_{n=0}^{2N-k} a_k b_n - \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} a_k b_n$

$$\Delta_N = \cancel{\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} a_k b_m} + \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=N+1}^{2N-k} a_k b_m + \sum_{k=N+1}^{2N}\sum_{m=0}^{2N-k} a_k b_m - \cancel{\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} a_k b_m}$$

$$\Delta_N = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=N+1}^{2N-k} a_k b_m + \sum_{k=N+1}^{2N}\sum_{m=0}^{2N-k} a_k b_m$$

$$\|\Delta_N\| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=N+1}^{2N-k} \|a_k\|\|b_m\| + \sum_{k=N+1}^{2N}\sum_{m=0}^{2N-k} \|a_k\|\|b_m\|$$

$$\|\Delta_N\| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\|a_k\|\right)\left(\sum_{m=N+1}^{+\infty}\|b_m\|\right) + \left(\sum_{k=N+1}^{+\infty}\|a_k\|\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\|b_m\|\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

D'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m\right)$

(+) ppe des zéros isolés

Soit $f : z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de cv R. On suppose que $\exists (z_p)_{p\geqslant 0}$ une suite telle que $z_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ et $z_p \neq 0$ et $f(z_p) = 0$ $\forall p \in \mathbb{N}$.

On suppose que $f \neq 0$. Alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $a_n \neq 0$.

On pose $q = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$.

Ainsi, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=q}^{+\infty} a_n z^n = z^q \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+q} z^n}_{g(z)}$

comme $g(z)$ est normalement convergente sur $D(0,r)$ $r<R$

Alors $\displaystyle\lim_{z\to 0}(g(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{z\to 0}(a_{n+q} z^n) = a_q$

Donc $g(z_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} a_q$. Or comme $f(z_p) = 0$ et $z_p \neq 0$

alors $g(z_p) = 0$ $\forall p \in \mathbb{N}$ donc $a_q = 0$. Contradiction

$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = 0$ donc $f \equiv 0$.