Déterminant circulant - suite de Polygones / racines de polynômes:

Référence: [Isenmann]

Lemme: $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \\ a_2 & \ddots & & a_1 \\ a_1 & a_2 & & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{\frac{2j i\pi k}{n}} \right)$

Appli: Soit P_0 un polygone dans le plan complexe. On créé une suite de polygones $(P_k)_{k\geq 0}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, le polygône P_{k+1} a pour sommet les milieux des arêtes de P_k. Alors $(P_k)_{k\geq 0}$ converge vers l'isobarycentre de P_0 (ie. le point $g = \frac{z_1 + \dots + z_n}{n}$ où les z_i sont les affixes des sommets de P_0).

Démonstration:

(E1) Lemme: déterminant circulant

Décomposer A avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$

(E2) Mq si $\forall k \in \mathbb{N}$ P_k a le même isobarycentre que P_0. Donc que si $(P_k)_{k\geq 0}$ converge vers un point, alors c'est l'isobarycentre de P_0.

(E3) Ecrire la relation de récurrence entre P_k et P_0 et diagonaliser A puis mq A converge

(E4) Mq $Z_k \longrightarrow X$ et X vérifie $AX = X$ ie $X \in E_1$ donc $X = \lambda \times {}^t(1 \dots 1)$.

(E1) Soient $(a_0, \dots, a_{n-1})$ des com ces et la matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$

Cette matrice représente φ définie sur $B = (e_1, \dots, e_n)$

par $\varphi(e_i) = e_{i-1} \quad \forall i \in [\![1; n-1]\!]$ et $\varphi(e_1) = e_n$

Donc $\forall k \in [\![1;n]\!], \forall i \in [\![1;n]\!] \quad \varphi^k(e_i) = \begin{cases} e_{i-k} & \text{si } k < i \\ e_{n-k+i} & \text{si } k \geq i \end{cases}$

Donc $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$ on a $J^k = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{n-k} \\ \hline I_k & 0 \end{array}\right)$ et $J^n = I$

On a alors $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$

Si on diagonalise J alors on aura diagonalisé A.

$\chi_J(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ -1 & & & X \end{vmatrix} = X(X^{n-1}) + (-1)^{n-1} \times (-1) \times (-1)^{n-1}$

$= X^n - 1$

Donc J a n valeurs propres distinctes qui sont les n racines n-ième de l'unité donc elle est diagonalisable.

Donc $\exists P \in Gl_n(\mathbb{C})$ telle que $J = P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \omega^2 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1}$

où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$ $J^k = P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega^k & & \\ & & \omega^{2k} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^{k(n-1)} \end{pmatrix} P^{-1}$

Donc $A = P \left(\sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} a_k & & & \\ & a_k\omega^k & & \\ & & a_k\omega^{2k} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_k\omega^{k(n-1)} \end{pmatrix} \right) P^{-1}$

Donc $A = P \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} a_k & & & \\ & \sum_{k=0}^{n-1} a_k\omega^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{k(n-1)} \end{pmatrix}}_{= M} P^{-1}$

Donc $\det(A) = \det(M) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk} \right)$ $\square$

(E2) Soit P_0 le polygône dont les sommets sont $\{z_1, \dots z_n\}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, P_{k+1} a pour sommets $\left\{ \frac{z_1+z_2}{2} ; \dots ; \frac{z_0+z_1}{2} \right\}$

$\forall k \in \mathbb{N}$, on note $Z_k = \begin{pmatrix} z_1^k \\ \vdots \\ z_n^k \end{pmatrix}$ le vecteur contenant les sommets de P_k.

Z_k représente ainsi P_k

si g est l'isobarycentre de P_0 alors

$$g = \frac{z_1 + \dots + z_n}{n}$$

Et en notant $\forall k \in \mathbb{N}^*$ g_k l'isobarycentre de P_k, on a alors

$$g_k = \frac{z_1^k + \dots + z_n^k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^{k-1} + z_{i+1}^{k-1}}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} z_i^{k-1} = g^{k-1}$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $g_k = g$ avec $g_0 = g$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$ l'isobarycentre de P_k est le même que l'isobarycentre de P_0.

Si on montre que $(P_k)_{k \geq 0}$ converge vers un point alors ce point sera l'isobarycentre de P_0.

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et on a la relation $Z_{k+1} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}}_{= A} Z_k = \frac{1}{2^{k+1}} A^{k+1} Z_0$

On cherche alors à diagonaliser A pour pouvoir montrer facilement que A^k converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On veut donc calculer χ_A.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & -1 \\ -1 & & 0 & X-1 \end{vmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On reconnaît alors un déterminant circulant avec

$a_0 = (X-1)$, $a_1 = -1$, $a_k = 0$ $\forall k \in [\![2;n-1]\!]$.

Dc $2^n \chi_A(X) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{kj} \right) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(a_0 + a_1 \omega^j \right)$

$$= \prod_{j=0}^{n-1} \left(X - 1 - \omega^j \right)$$

Donc $2^n \chi_A(X) = \prod_{j=0}^{n-1} (X - (1+\omega^j))$

Donc A est diagonalisable, elle a n racines distinctes.

Donc $\exists Q \in Gl_n(\mathbb{C})$ tq $A = Q \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1+\omega}{2} & & \\ & & \frac{1+\omega^2}{2} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1+\omega^{n-1}}{2} \end{pmatrix}}_{D} Q^{-1}$

Soit $j \in [\![1;n-1]\!]$,

$$\left|\frac{1+\omega^j}{2}\right| = \left|\frac{1+e^{\frac{2i\pi j}{n}}}{2}\right| = \left|e^{\frac{2i\pi j}{2n}}\right| \left|\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)\right|$$

$$= \left|\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)\right| < 1 \text{ pour } j \in [\![1;n-1]\!]$$

donc $D^k = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \left(\frac{1+\omega^2}{2}\right)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left(\frac{1+\omega^{n-1}}{2}\right)^k \end{pmatrix} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{C}$

En particulier (D^k) converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Donc par continuité de l'application $M \mapsto QMQ^{-1}$
A converge également dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vers $B = QCQ^{-1}$

(E4) Donc (Z_k) converge vers $X = BZ_0$ dans $\mathbb{C}^n$

$$Z_k = A^k Z_0$$

Donc
$$\underbrace{A Z_k}_{\xrightarrow[k \to +\infty]{} AX} = \underbrace{A^{k+1} Z_0}_{\xrightarrow[k \to +\infty]{} BZ_0 = X}$$

Donc $AX = X$ donc X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1. Or E_1 est de dimension 1 car A a n valeurs propres distinctes et le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1$ $A \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ | \\ 2 \end{pmatrix} = 1$.

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tq $X = \begin{pmatrix} \lambda \\ | \\ \lambda \end{pmatrix}$

Donc $(P_k)_{k \geq 0}$ converge vers un polygone de sommets $\begin{pmatrix} \lambda \\ | \\ \lambda \end{pmatrix}$ c'est-à-dire le point d'affixe λ.

Donc d'après (E2) $g = \lambda$ est l'isobarycentre de P_0. □