Références :
Algèbre linéaire numérique, Grégoire Allaire

Théo. *Soit une matrice* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *d'ordre* n *dont toutes les sous-matrices diagonales*

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1k} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{k1} & . & . & . & a_{kk} \end{pmatrix}$$

sont inversibles. Il existe un unique couple (L, U) *avec* U *triangulaire supérieure et* L *triangulaire inférieure à diagonale unité tel que*

$$A = LU.$$

Démonstration. Supposons qu'au cours de l'élimination de Gauss, il n'y ait pas besoin de faire de permutations pour changer de pivot, ie que tous les pivots naturels sont non nuls. Alors on a

$$A^{(n)} = E_{n-1}...E_1 A$$

avec

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & -l_{k+1,k} & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & -l_{n,k} & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

et pour $i \in [\![k+1, n]\!], l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$.
On pose $U = A^{(n)}$ et $L = (E_1)^{-1}...(E_{n-1})^{-1}$. Alors on a $A = LU$ et il reste simplement à vérifier que L est bien triangulaire supérieure. On trouve facilement que

$$(E_k)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & l_{k+1,k} & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & l_{n,k} & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De la même manière, on a que

$$L \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ l_{21} & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ l_{n1} & . & . & . & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons maintenant que les pivots ne s'annulent pas sous l'hypothèse faite sur les matrices Δ^k.
On le fait par récurrence.
Le premier pivot a_{11} est non nul car égal à Δ^1 qui est inversible. On suppose que tous les pivots jusqu'à l'ordre $k-1$ sont non nuls. Montrons que le nouveau pivot a_{kk}^k est aussi non nul. Comme les $k-1$ premiers pivots sont non nuls, on a pu calculer $A^{(k)}$. On écrit alors l'égalité $(E_1)^{-1}...(E_{k-1})^{-1}A^{(k)} = A$ sous la forme d'une égalité entre matrices par blocs :

$$\begin{pmatrix} L_{11}^{(k)} & 0 \\ L_{21}^{(k)} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta^k & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

avec $U_{11}^{(k)}$, $L_{11}^{(k)}$ et Δ^k des blocs carrés de taille k, et $A_{22}^{(k)}, I$ et A_{22} des blocs carrés de taille $n-k$. En appliquant la règle de multiplication des matrices par blocs, on obtient

$$L_{11}^{(k)}U_{11}^{(k)} = \Delta^k,$$

où $U_{11}^{(k)}$ est une matrice triangulaire supérieure et $L_{11}^{(k)}$ une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. On en déduit que la matrice $U_{11}^{(k)} = (L_{11}^{(k)})^{-1}\Delta^k$ est inversible comme produit de matrices inversibles. Son déterminant est donc non nul. Or

$$det(U_{11}^{(k)}) = \prod_{i=1}^{k} a_{ii}^{(k)} \neq 0,$$

donc le pivot $a_{kk}^{(k)}$ à l'étape k est non nul.
Il ne reste plus qu'à vérifier l'unicité. Soient deux décompositions LU de la matrice A

$$A = L_1U_1 = L_2U_2.$$

On en déduit que

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$$

où la matrice $L_2^{-1}L_1$ est triangulaire inférieure et $U_2U_1^{-1}$ est triangulaire supérieure. Elles sont donc toutes les deux diagonales, et comme la diagonale de $L_2L_1^{-1}$ est composée de 1, on a $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I_n$ d'où l'unicité. □

Théo. *Soit A une matrice symétrique réelle définie positive. Il existe une unique matrice réelle B triangulaire inférieure, telle que tous ses éléments diagonaux sont strictement positifs et qui vérifie :*

$$A = B^tB.$$

Démonstration. On vérifie l'hypothèse sur les mineurs. Comme A est symétrique définie positive, on peut lui associer un produit scalaire ϕ. On a donc que

$$A = \begin{pmatrix} \phi(e_1,e_1) & . & . & . & \phi(e_1,e_n) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \phi(e_n,e_1) & . & . & . & \phi(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

Si on écrit le mineur d'ordre k, on a

$$\Delta^k = \begin{pmatrix} \phi(e_1,e_1) & . & . & . & \phi(e_1,e_k) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \phi(e_k,e_1) & . & . & . & \phi(e_k,e_k) \end{pmatrix}$$

On a donc que Δ^k est la matrice de ϕ sur $Vect(e_1,...,e_k)$. Elle est donc définie positive et inversible. Par application du théorème sur la décomposition LU, il existe un unique couple de matrices (L,U) tel que $A = LU$ avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ \times & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \times & . & . & . & \times & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u_{11} & \times & . & . & . & \times \\ 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

On note D la matrice diagonale définie par $D = diag(\sqrt{u_{ii}})$. On a bien que les u_{ii} sont strictement positifs car $\prod_{i=1}^k u_{ii} = \det(\Delta^k) > 0$. On pose alors $B = LD$ et $C = D^{-1}U$ qui vérifie $A = BC$. Comme $A =^t A$, on en déduit

$$C(^tB)^{-1} = (B^{-1})^tC.$$

La matrice $C(^tB)^{-1}$ est triangulaire supérieure tandis que $(B^{-1})^tC$ est triangulaire inférieure. Elles sont donc toutes les deux diagonales. De plus, tous les éléments diagonaux de B et C sont les mêmes, donc la diagonale de $(B^{-1})^tC$ n'est constituée que de 1. On en déduit

$$C(^tB)^{-1} = (B^{-1})^tC = I_n \Rightarrow C =^t B.$$

Pour montrer l'unicité de la décomposition de Cholesky, on suppose qu'il existe deux factorisations

$$A = B_1^tB_1 = B_2^tB_2,$$

d'où

$$B_2^{-1}B_1 =^t B_2({}^tB_1)^{-1}.$$

Il existe donc une matrice diagonale $D = diag(d_1, ..., d_n)$ telle que

$$B_2^{-1}B_1 = D \Rightarrow B_1 = B_2D.$$

On en déduit que

$$A = B_2^tB_2 = B_2(D^tD)^tB_2.$$

Comme B_2 est inversible, il vient $D^2 = I_n$ donc $d_i = \pm 1$. Or tous les coefficients diagonaux d'une décomposition de Cholesky sont positifs par hypothèse. Donc $d_i = 1$ ce qui implique $B_1 = B_2$. □

Leçons possibles : 162