Théorème d'Ostrowski-Reich : convergence de la méthode de relaxation

Pré-requis

Soit A une matrice carrée, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{b}$ deux vecteurs tels que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Soit également une matrice carrée B et un vecteur $\mathbf{c}$ tels que $I - B$ soit inversible et $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$. La matrice B est appelée matrice de méthode itérative.

Pour un premier terme arbitraire $\mathbf{x}_0$, nous définissons la suite récurrente $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ par, pour tout entier k :

$$\mathbf{x}_{k+1} = B\mathbf{x}_k + c. \tag{1}$$

Nous rappelons alors que la convergence de $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ vers $\mathbf{x}$ est caractérisée par $\rho(B) < 1$.

Étant donnée une matrice A inversible, nous notons D la matrice extraite des coefficients diagonaux, E l'opposée de la matrice extraite des coefficients sous-diagonaux et F l'opposée de la matrice extraite des coefficients sur-diagonaux. De sorte que $A = D - E - F$. Introduisons également pour un certain paramètre ω réel non nul, $M = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)$ et $N = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$. Ainsi A se décompose en $A = M - N$.

La matrice $L_\omega = M^{-1}N$ est alors une matrice de méthode itérative dite matrice de relaxation (par points). Le développement consiste à caractériser la convergence de la méthode de relaxation selon le paramètre ω.

Développement

Lemme 1. *Soit A une matrice hermitienne définie positive, soit M une matrice inversible et $N = M - A$ telles que la matrice hermitienne $M^* + N$ soit définie positive.*

$$\rho(M^{-1}N) < 1. \tag{2}$$

Admettons ce lemme pour le moment et tirons-en immédiatement une conséquence.

Proposition 2. *La méthode de relaxation sur une matrice hermitienne définie positive converge si le paramètre de relaxation est strictement compris entre zéro et deux.*

Démonstration. Soit A une matrice hermitienne définie positive et D, E, F sa décomposition pour la méthode de relaxation telle que $A = D - E - F$.

Soit ω réel le paramètre de relaxation.

Soit $M = \frac{1}{\omega}D - E$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$. Alors :

$$M^* + N = \frac{1}{\omega}D^* - E^* + \frac{1-\omega}{\omega}D + F = \frac{1}{\omega}D - F + \frac{1-\omega}{\omega}D + F = \frac{2-\omega}{\omega}D.$$

Or, D est définie positive puisque A l'est. La matrice $M^* + N$ est donc définie positive si, et seulement si, $\frac{2-\omega}{\omega} > 0$. C'est-à-dire lorsque $0 < \omega < 2$. Dans cette situation, le lemme 1 s'applique alors et prouve la convergence. □

Nous pouvons énoncer une réciproque forte à la proposition 2, au sens où elle est indépendante de toute hypothèse.

Proposition 3. *Soit ω un réel non nul et L_ω la matrice de relaxation d'une matrice inversible.*

$$\rho(L_\omega) \geqslant |\omega - 1| \tag{3}$$

En particulier, si la méthode de relaxation converge, le paramètre de relaxation est strictement compris entre zéro et deux.

Démonstration. Soit A une matrice inversible et D, E, F sa décomposition pour la méthode de relaxation telle que $A = D - E - F$.

Soit ω réel le paramètre de relaxation.

Rappelons la matrice de relaxation :

$$L_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right).$$

Ainsi,

$$\det(L_\omega) = \frac{\det\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)}{\det\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)} = \frac{\det\left(\frac{1-\omega}{\omega}D\right)}{\left(\frac{1}{\omega}D\right)} = (1-\omega)^n.$$

Nous pouvons majorer, par définition du rayon spectral :

$$|\omega - 1|^n \leqslant \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(L_\omega)} |\lambda| \leqslant \rho(L_\omega)^n.$$

Nous concluons.

$$\rho(L_\omega) \geqslant |\omega - 1|.$$

□

Ces deux propositions nous permettent d'énoncer le théorème central de ce développement.

Théorème 4. *La méthode de relaxation pour une matrice hermitienne définie positive converge si et seulement si le paramètre de relaxation est strictement compris entre zéro et deux.*

Revenons maintenant sur la preuve du lemme.

Démonstration. Deux assertions sont à montrer.

— La matrice $M^* + N$ est toujours hermitienne :

$$M^* + N = A^* + N^* + N = A + N^* + N = M + N^*.$$

— Considérons la norme vectorielle donnée pour tout vecteur $\mathbf{x}$ par :

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^* A \mathbf{x}}.$$

Soit $|||\cdot|||$ la norme subordonnée induite.

$$|||M^{-1}N||| = |||I - M^{-1}A||| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{x} - M^{-1}A\mathbf{x}\|.$$

Soit $\mathbf{x}$ un vecteur unitaire pour la norme considérée et $\mathbf{y} = M^{-1}A\mathbf{x}$.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} - \mathbf{y})^* A (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= \mathbf{x}^* A \mathbf{x} - \mathbf{x}^* A \mathbf{y} - \mathbf{y}^* A \mathbf{x} + \mathbf{y}^* A \mathbf{y} \\
&= 1 - \mathbf{y}^* M^* (A^{-1})^* A \mathbf{y} - \mathbf{y}^* A A^{-1} M \mathbf{y} + \mathbf{y}^* A \mathbf{y} \\
&= 1 - \mathbf{y}^* (M^* + M - A) \mathbf{y} \\
&= 1 - \mathbf{y}^* (M^* + N) \mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Or, la matrice $M^* + N$ est hermitienne définie positive. Donc $\mathbf{y}^*(M^* + N)\mathbf{y} > 0$. Il s'ensuit $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < 1$. Nous avons majoré uniformément pour tout vecteur $\mathbf{x}$ unitaire :

$$\|\mathbf{x} - M^{-1}A\mathbf{x}\| < 1.$$

Donc par passage à la borne supérieure sur $\mathbf{x}$:

$$|||M^{-1}N||| \leqslant 1.$$

De plus, l'application $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x} - M^{-1}A\mathbf{x}\|$ est continue sur la sphère compacte. Son minimum est donc atteint, ce qui exclu le cas d'égalité. Puisque le rayon spectral est inférieur à toute norme matricielle nous concluons.

$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$

□

Références

[Cia24] Philippe Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Cours et exercices corrigés.* 5^{e} éd. Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, mai 2024. URL : https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-matricielle-et-optimisation-0.