

Exo 10.
61, 103, 109, 130

Formule de Burnside :

Soit G un groupe fini agissant sur E (fini)
On note π l'ensemble des orbites de
l'action de G sur E . On a :

$$|\pi| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

$$\text{où } \text{Fix}(g) = \{x \in E \mid g \cdot x = x\}$$

Références :

CBERS : Berhuy, Rg.
le grand combats

ZLEF : Lefevre, 131
don pour l'agreg

Théorème : Dixon

Soit G non abélien, fini d'ordre n .
On note k le nombre de classe de conj. de G
et $p(G)$ la proba que 2 éléments tirés
uniformément et indépendamment commutent.
Alors,

$$p(G) = \frac{k}{n} \leq \frac{5}{8}$$

Pour la formule de Burnside CBERS p. 176 3min 30

On va calculer le cardinal de $C = \{(g, x) \in G \times E \mid g \cdot x = x\}$ de 2
manières différentes et on aura le résultat.

1ère manière :

$$C = \bigcup_{x \in E} \{(g, x) \mid g \in G \text{ et } g \cdot x = x\}$$

$$= \bigcup_{x \in E} \text{stab}(x) \times \{x\}$$

$$\text{Donc } |C| = \sum_{x \in E} |\text{stab}(x)| \underbrace{|\{x\}|}_{=1} \quad (\text{car union disjointes})$$

$$= \sum_{x \in E} \frac{|G|}{|\text{orb}(x)|}$$

$$\text{or } E = \bigcup_{x \in E} \text{orb}(x) \quad \text{or si } w \in \pi, \text{ pour } x \in w \text{ on a } \text{orb}(x) = w$$

$$\text{Donc } |C| = |G| \sum_{x \in E} \frac{1}{|\text{orb}(x)|}$$

$$= |G| \sum_{w \in \pi} \sum_{x \in w} \frac{1}{|w|}$$

$$= |G| \sum_{w \in R} |w| \frac{1}{|w|}$$

$$= |G| |R|$$

2nd manière :

$$C = \bigcup_{g \in G} \{ (g, x) \mid x \in E, g \cdot x = x \}$$

$$= \bigcup_{g \in G} \{g\} \times \text{Fix}(g)$$

$$|C| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

D'où le résultat □

Pour le théorème de Dixon ZLEF3 p.10

Définissons la proba et ce qu'elle vaut :

• Par définition on a :

$$P(G) = \frac{1}{|G|^2} |\{ (x, y) \in G^2 \mid x y = y x \}|$$

$$= \frac{1}{|G|^2} \sum_{x \in G} |\{ y \in G \mid x y = y x \}|$$

$$= \frac{1}{|G|^2} \sum_{x \in G} |C_x|$$

C_x = centralisateur de x .

• Établissons que $P(G) = \frac{k}{|G|} (= \frac{k}{n})$:

Faisons agir G ^{sur} lui-même par conjugaison,

$$\begin{aligned} \text{On a } \text{Fix}(x) &= \{ g \in G \mid x g x^{-1} = g \} \\ &= \{ g \in G \mid g x = x g \} \\ &= C_x \end{aligned}$$

dire :

"en faisant agir G sur lui-même par conj. on a : $\text{Fix}(x) = C_x$ "

Donc par Burnside,

$$h = \frac{1}{n} \sum_{x \in G} |C_x|$$

Donc $\frac{h}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{x \in G} |C_x| = P(G)$ d'après ce qu'il précède.

(ici j'en suis à $6 \text{ min } 10$)

On va découper notre somme d'une certaine manière

$$\begin{aligned} p(G) &= \frac{1}{|G|^2} \left(\sum_{x \in Z(G)} |C_x| + \sum_{x \in G \setminus Z(G)} |C_x| \right) \\ &= \frac{1}{|G|^2} \left(\sum_{x \in Z(G)} |G| + \sum_{x \in G \setminus Z(G)} |C_x| \right) \end{aligned}$$

On va majorer tout ça:

$$\frac{|G|}{|C_x|} \geq 2 \Rightarrow |C_x| \leq \frac{1}{2} |G|$$

• Pour $x \in G \setminus Z(G)$ on a $[G : C_x] \geq 2$ (car $C_x \neq G$)

$$\text{Donc } p(G) \leq \frac{1}{|G|^2} \left(\sum_{x \in Z(G)} |G| + \sum_{x \in G \setminus Z(G)} \frac{|G|}{2} \right)$$

• On va m'y $[G : Z(G)] \geq 4$ (ce qui implique que $|Z(G)| \leq \frac{1}{4} |G|$)

G n'est pas abélien, donc $[G : Z(G)] \geq 2$

Si $[G : Z(G)] = 2$ ou 3 , alors $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Z}_3$

qui sont cycliques.

Donc G serait abélien, absurde donc $[G : Z(G)] \geq 4$
(savoir m'y $\frac{G}{Z(G)}$ monogène $\Rightarrow G$ abélien)

• Reprenons

$$p(G) \leq \frac{1}{|G|^2} \left(\sum_{x \in Z(G)} |G| + \sum_{x \in G \setminus Z(G)} \frac{|G|}{2} \right)$$

Donc:

$$\begin{aligned} |G|^2 P(G) &\leq |G| |Z(G)| + \sum_{x \in G \setminus Z(G)} \frac{1}{2} |G| \\ &= |G| |Z(G)| + \frac{1}{2} |G| (|G| - |Z(G)|) \\ &= \frac{1}{2} |G| |Z(G)| + \frac{1}{2} |G|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} |G| \frac{1}{4} |G| + \frac{1}{2} |G|^2 \\ &= \frac{1}{8} |G|^2 + \frac{1}{2} |G|^2 \\ &= \frac{5}{8} |G|^2 \end{aligned}$$

D'où le résultat

13 min à la fin ... prendre un peu de temps
faudrait arriver à 12 min au calcul. □

Commentaires:

- Même si la majoration peut paraître mauvaise elle est optimale

$$P(D_8) = \frac{5}{8}, \quad P(H_8) = \frac{5}{8}$$

- savoir montrer (---)