

Cofono:  
151, 152, 153, 157  
158

Théorème: Spectral

Soit  $f$  un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien (i.e symétrique) Alors:

- Les vp de  $f$  sont réelles
- $f$  est diagonalisable
- Les sous-espaces propres de  $f$  sont orthogonaux

V2

References:  
[GRTS]: Grifone,  
Alg. Linéaire.

Pour le théorème, [GRTS] p.253

- Hg  $\lambda_f$  est strict i.e toutes les vp de  $f$  sont réelles (mis en doute).

Soit  $\lambda$  un vp  $A := \text{Mat}_B(f)$  où  $B$  est une base orthonormée.  
 $A$  priori  $\lambda$  peut être complexe.

Prends  $x = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ .

→ On a  ${}^t(AX)\bar{x} = {}^tX A \bar{x}$  car  $A$  est symétrique

→ De plus,  $AX = \lambda X$  donc  $A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$  (car  $A$  réelle)

Donc

$${}^t(\lambda X)\bar{x} = {}^tX(\bar{\lambda}\bar{x})$$

$$\text{Donc } \lambda {}^tX\bar{x} = \bar{\lambda} {}^tX\bar{x}$$

$$\text{D'où } \lambda \underbrace{(|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)}_{\neq 0 \text{ car } x \neq 0} = \bar{\lambda} (|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)$$

Donc  $\lambda = \bar{\lambda}$ , ce qui veut dire que  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- Montrons par récurrence qu'il existe une base de vecteur propre pour  $f$ . (rec sur la dim. de  $E$ )

Initialisation: Pour  $n=1$  il n'y a rien à prouver.

Hérédité: On se la pte est vraie au rang  $n-1$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une vp de  $f$ . Notons  $H := \text{vect}(x)^\perp$  où  $x$  est un  $\vec{v}_f$  associé à  $\lambda$ .

→ Hg  $H$  est stable par  $f$  (i.e.  $f(H) \subset H$ )

Soit  $y \in H$ , mg  $f(y) \in H$  i.e  $\langle f(y), x \rangle = 0$ :

$$\begin{aligned} \langle f(y), x \rangle &= \langle y, f(x) \rangle \\ &= \langle y, \lambda x \rangle = 0 \end{aligned}$$

On a que  $f|_H \in \mathcal{I}(H)$ .

→  $H|_H - f|_H$  est auto-adjoint sur  $H$  (pour la restriction des p.s.)

Soient  $v, w \in H$

$$\begin{aligned}\langle f|_H(v), w \rangle_H &= \langle f(v), w \rangle_E \\ &= \langle v, f(w) \rangle_E \\ &= \langle v, f|_H(w) \rangle_H\end{aligned}$$

→ Appliquons l'hypothèse de récurrence et concluons

$\dim(H) = n-1$ , donc par H.R. il existe  $\{e_2, \dots, e_n\}$  une base de vecteur propre de  $f|_H$  et  $\{\alpha, e_2, \dots, e_n\}$  est une famille de  $\vec{v}_p$  pour  $f$ .

Mais la famille  $\{\alpha, e_2, \dots, e_n\}$  est une base de  $E$  car  $E = H \oplus H^\perp$  et  $\{\alpha\}$  est une base de  $H^\perp$  et  $\{e_2, \dots, e_n\}$  une base de  $H$ .

Conclusion:

Par principe de récurrence, il existe une base de vecteur propre de  $f$ , donc  $f$  est diagonalisable.

•  $H|_H$  Les sous-espaces propres de  $f$  sont 2 à 2 orthogonaux

Soient  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  2 vp de  $f$  et  $v_1, v_2$  des  $\vec{v}_p$  associés.

$H|_H$   $v_1$  et  $v_2$  sont orthogonaux:

$$\begin{aligned}\langle f(v_1), v_2 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle \\ &= \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\langle f(v_1), v_2 \rangle &= \langle v_1, f(v_2) \rangle \\ &= \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle\end{aligned}$$

$$\text{D'où } (\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

Donc  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

D'où le thm.

□

### Commentaires:

Les matrices symétriques complexes ne sont pas forcément diagonalisables  
ex ex:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \text{ n'est pas diagonalisable car } 1 \text{ est vp double}$$

Les matrices hermitiennes sont diagonalisables, leur vp sont réelles et leurs paires propres orthogonales.

Savoir mq  $E = U \oplus U^\perp$  (thm proj + U fermé)