

Théorème:

1. Le système (S):
$$\begin{cases} x = a \pmod{m} \\ x = b \pmod{n} \end{cases} \quad \text{où } \begin{cases} a, b \in \mathbb{Z} \text{ et} \\ m, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

admet des solutions si $a \equiv b \pmod{\delta}$ où $\delta = \text{pgcd}(m, n)$

2. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de (S) est $x_0 + \mu \mathbb{Z}$ où $\mu = \text{ppcm}(m, n)$

et $x_0 = \frac{1}{\delta} (avm + bun)$ où u, v sont tels que $um + vn = \delta$.

Références:
CCVMS: Caldero,
Carnet de voyage
en Algèbre.

V2

Pour 1) : p. 209 CCVMS

• Créons de bonnes applications

Posons
$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}: \mathbb{Z} &\longrightarrow \left(\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \right) \\ x &\longmapsto (\bar{x}_m, \bar{x}_n) \end{aligned}$$

où $\bar{x}_m$ est la réduction de x modulo m .

$\tilde{\varphi}$ est un morphisme de groupe.

→ Étudions $\text{Ker}(\tilde{\varphi})$

$x \in \text{Ker}(\tilde{\varphi})$ si $(\bar{x}_m, \bar{x}_n) = (0, 0)$
si $m|x$ et $n|x$
i.e. $\mu|x$

Ainsi $\text{Ker}(\tilde{\varphi}) = \mu \mathbb{Z}$

→ Quotientons $\tilde{\varphi}$

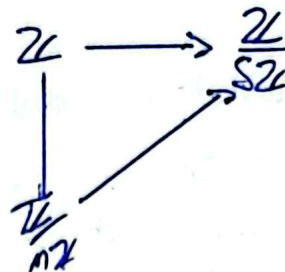
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \\ \downarrow & \searrow \varphi & \\ \frac{\mathbb{Z}}{\mu\mathbb{Z}} & & \end{array}$$

où φ est injectif.

→ Définissons une ψ surjective

$$\begin{aligned} \psi: \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} &\longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{\delta\mathbb{Z}} \\ (\bar{x}_m, \bar{y}_n) &\longmapsto (\bar{x}_\delta - \bar{y}_\delta) \end{aligned}$$

Ψ est bien définie en effet:
 $8 \mid m$ donc $m\mathbb{Z} \subset 8\mathbb{Z}$, d'où



Et de même avec m .

Ψ est surjective en effet, soit $\bar{a}_8 \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ on a
 $\Psi(\bar{a}_m, 0) = \bar{a}_8$ d'où la surjectivité.

• Hy $\text{Im } \Psi = \text{Ker } \Psi$

$\rightarrow$ IC Soit $x \in \mathbb{Z}$, $(\bar{a}_m, \bar{x}_m) \in \text{Im } \Psi$.
 donc $\Psi(\bar{a}_m, \bar{x}_m) = \bar{x}_8 - \bar{x}_8 = 0$

Donc $\text{Im } \Psi \subset \text{Ker } \Psi$

$\rightarrow$ Hy $|\text{Im } \Psi| = |\text{Ker } \Psi|$

$$|\text{Im } \Psi| = \left| \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \right| \quad (\text{par injectivité})$$

$$= \mu$$

$$= \frac{mn}{8}$$

$$= \frac{|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}|}{|\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}|}$$

$$= \frac{|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}|}{|\text{Im } \Psi|} \quad \downarrow \Psi \text{ surj.}$$

$$= |\text{Ker } \Psi|$$

• Conclusions

α est sol. de (S)ssi $(\hat{f}(\alpha)) = (\bar{a}_n, \bar{x}_m) = (\bar{a}_n, \bar{b}_m)$
 $\in \text{Im}(\Psi) = \text{Ker}(\Psi)$

$$\text{ssi } \bar{a}_8 - \bar{b}_8 = 0 \quad \text{i.e. } \bar{a}_8 = \bar{b}_8$$

Pour 2):

- Il y a $x_0 = \frac{1}{s}(avm + bum)$ est sol. de (S) (dans le cas $\bar{a}_s = \bar{b}_s$)

Puisque $\bar{a}_s = \bar{b}_s$ on a qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $a = b + ks$

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{1}{s}((b+ks)v_m + bum) \\&= \frac{1}{s}b \underbrace{(v_m + um)}_{=s} + kv_m\end{aligned}$$

donc $x_0 = b \text{ cm}$

De même avec $b = a - ks$ on trouve $x_0 = a \text{ cm}$

- Déterminons l'ensemble des sol. de (S)

Prenons x une sol. de (S)

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x_0) \quad \text{donc} \quad \tilde{\varphi}(x - x_0) = 0$$

donc $x - x_0 \in \text{Ker}(\tilde{\varphi}) = \mu \mathbb{Z}$. D'où le résultat.

Faisons une application:

$$(S) \begin{cases} x = 3 \text{ (21)} \\ x = 10 \text{ (35)} \end{cases}$$

$$\text{pgcd}(21, 35) = 7 \quad \text{on a} \quad \overline{3}_7 = \overline{10}_7$$

Cherchons u, v tq $u21 + v35 = 7$

$u = 2$ et $v = -1$ conviennent.

$$\begin{aligned}\text{Donc } x_0 &= \frac{1}{7} \left(-\frac{3 \times 35}{105} + \frac{10 \times 2 \times 21}{420} \right) \\&= \frac{315}{7} \\&= 45\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu &= \text{ppcm}(21, 35) = 3 \times 5 \times 7 \\&= 105\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des sol. sont $45 + 105 \mathbb{Z}$.