# 19 Théorème de l'application ouverte

Ref : brézis

THÉORÈME 19.1 *Soit $E$ et $F$ des espaces vectoriels normés et $T : E \to F$ une application linéaire. Elle est ouverte si et seulement si elle est ouverte en 0. Dans ce cas, elle est surjective.*

*Réciproquement si elle est surjective elle est ouverte si on suppose en plus que $E$ et $F$ sont complets.*

PREUVE. Si elle est ouverte en 0, alors pour $x \in E$, et $V$ un voisinage de $x$, $V - x$ est un voisinage de 0 et $T(V) = T(V - x) + T(x)$ est encore un voisinage de 0. Si $T$ est ouverte, son image contient une boule ouverte centrée en 0 ainsi que ses images par homothétie, donc tout l'espace $F$.

Supposons maintenant $E$ et $F$ complets et $T$ continue surjective. Montrons que $T$ est ouverte. *On va d'abord utiliser la complétude à l'arrivée via le théorème de Baire.*

Par surjectivité on a :

$$F = \bigcup_{n=0}^{+\infty} n\overline{T(B(0,1))}$$

Les $n\overline{T(B(0,1))}$ sont fermés donc ne peuvent pas être tous d'intérieur vide par Baire. Ainsi $\overline{T(B(0,1))}$ contient une boule ouverte $B(y_0, 4c)$ avec $c > 0$. Comme $y_0 \in \overline{T(B(0,1))}$, par addition $B(0,4c) \subset \overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))} \subset 2\overline{T(B(0,1))}$ par convexité de $\overline{T(B(0,1))}$. D'où $B(0,2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$.

*On va maintenant montrer que $B(0,c) \subset T(B(0,1))$ en utilisant la complétude de $E$.*

Prenons $y \in F$ avec $\|y\| \leq c$ et cherchons $x \in B(0,1)$ tel que $Tx = y$. On va obtenir cet élément $x$ comme limite d'une suite de Cauchy que l'on construit grâce au point précédent :

$$\forall \epsilon > 0, \exists z \in E \text{ avec } \|z\| \leq \frac{1}{2} \text{ et } \|y - Tz\| \leq \epsilon$$

Pour $\epsilon = \frac{c}{2}$, on trouve $z_1$ vérifiant $\|z_1\| \leq \frac{1}{2}$ et $\|y - Tz_1\| \leq \frac{c}{2}$. On recommence avec $y - Tz_1$ et $\epsilon = \frac{c}{4}$. On construit ainsi une suite $z_n$ et $x_n = z_1 + \cdots + z_n$ vérifiant $\|z_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ et $\|y - Tx_n\| \leq \frac{c}{2^n}$. La suite $(x_n)$ est donc de Cauchy dans $E$ qui est complet donc converge vers un élément $x \in B(0,1)$. Par continuité de $T$, on a alors $Tx = y$.

On a donc montré que $B(0,c) \subset T(B(0,1))$, c'est-à-dire que $T$ est une application ouverte. □

Leçons concernées : espaces complet, evn.