Leçons : 158, 159, 170, 171

Lemme 1 :

Soit F un sev. de E.

1) $\dim(F) + \dim(F^\perp) \geq \dim(E)$ (avec égalité si $q_{|F}$ non dg)

2) $E = F \oplus F^\perp$ ssi $q_{|F}$ est non deg.

Références : [ROM] : Rombaldi, Alg. géo.

Théorème 1 :

Il existe un unique couple $(s,t) \in \mathbb{N}^2$, tq pour toutes bases q-orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$ on a :

$$s = |\{i \in [\![1,\dots,n]\!] \mid q(e_i) > 0\}| \text{ et } t = |\{i \in [\![1,\dots,n]\!] \mid q(e_i) < 0\}|$$

tq $s + t = \operatorname{rg} q$.

Théorème 2 :

Notons P (resp N) l'ensemble des sev de E sur lesquels la restriction de q est définie positive (resp. négative)

Alors :

$$s := \max_{E^+ \in P} \dim(E^+) \qquad t := \max_{E^- \in N} \dim(E^-)$$

V2

Pour le lemme 1, [ROM] p. 470

Pour 1) :

Remarquons que si $F = \{0\}$, $F^\perp = E$ $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$

• Essayons d'écrire $F^\perp$ comme le noyau d'une appli. linéaire

Prenons $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Pour $i \in \{1, \dots, p\}$ posons $\ell_i(x) = \varphi(x, e_i)$, $x \in E$. (les ℓ_i sont linéaires !)

$$\begin{aligned} F^\perp &= \{x \in E \mid \forall y \in F, \varphi(x,y) = 0\} \\ &= \{x \in E \mid \forall i \in [\![1,\dots,p]\!], \varphi(x, e_i) = 0\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(\ell_i) \\ &= \operatorname{Ker}(f) \quad \text{où} \quad f : E \to \mathbb{R}^p, \; x \mapsto (\ell_1(x), \dots, \ell_p(x)) \end{aligned}$$

• Appliquons le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim F^\perp &= \dim \operatorname{Ker}(f) \\ &= \dim(E) - \operatorname{rg}(f) \quad \text{thm du rg.} \\ &= \dim(E) - \operatorname{rg}(\ell_1, \dots, \ell_p) \end{aligned}$$

Or $rg(\ell_1, \dots, \ell_p) \leq p$ (et égalité ssi $(\ell_i)_i$ est libre !) $(*)$

Donc $\dim F^\perp \geq \dim(E) - \underbrace{p}_{= \dim(F)}$

D'où $\dim F^\perp + \dim F \geq \dim E$.

• <u>Pour le cas d'égalité :</u>

Mq si $q_{|F}$ est non deg. alors $(\ell_i)_{1 \leq i \leq p}$ est libre :

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tq $\lambda_1 \ell_1 + \dots + \lambda_p \ell_p = 0$. Pour $x \in F$ on a :

$\underbrace{\lambda_1 \ell_1(x) + \dots + \lambda_p \ell_p(x)}_{= \varphi(x, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i)} = 0$

Donc, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in F \cap F^\perp = \mathrm{Ker}(q_{|F}) \overset{\text{car non deg.}}{=} \{0\}$

Donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ d'où la liberté.

<u>Pour 2) :</u>

$\boxed{\Leftarrow}$ <u>Sq $q_{|F}$ est non deg</u>

→ D'après ce qu'il précède : $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$

→ De plus $F \cap F^\perp = \{0\}$ car $\underbrace{\mathrm{Ker}(q_{|F})}_{\substack{=\{0\} \\ \text{car } q \text{ non deg.}}} = F^\perp \cap F$

Finalement $E = F \oplus F^\perp$

$\boxed{\Rightarrow}$ <u>Réciproquement, sq $E = F \oplus F^\perp$</u>

On a $E = F \oplus F^\perp$ donc $\underbrace{F \cap F^\perp}_{= \mathrm{Ker}(q_{|F})} = \{0\}$

6min ici

□

Pour le <u>théorème 1</u>, [ROM] p.499

Remarquons que l'existence provient du thm de réduction de Gauss

Interessons nous à l'unicité.

Prenons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e_1', \dots, e_n')$ deux bases q-orthogonale de E tq

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} >0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & >0 \end{matrix}}_{s} & & (0) \\ & \underbrace{\begin{matrix} <0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & <0 \end{matrix}}_{t} & \\ (0) & & \underbrace{(0)}_{n-s-t} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} >0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & >0 \end{matrix}}_{s'} & & (0) \\ & \underbrace{\begin{matrix} <0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & <0 \end{matrix}}_{t'} & \\ (0) & & \underbrace{(0)}_{n-s'-t'} \end{pmatrix}$$

- Remarquons qu'on a $s + t = s' + t' = rg(q)$

Il suffit alors de mq $s = s'$ pour avoir l'unicité.

- Montrons déjà que $s' \geq s$

Posons $\begin{cases} F = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_s) \\ G = \mathrm{vect}(e_{s'+1}', \dots, e_n') \end{cases}$

-> Mq $F \cap G = \{0\}$

Si $s \geq 1$: $F \neq \{0\}$

Pour $x = \sum_{i=1}^{s} x_i e_i \in F \setminus \{0\}$ on a $q(x) = \sum_{i=1}^{s} \underbrace{q(e_i)}_{>0} \underbrace{x_i^2}_{\text{au moins un } x_i > 0} > 0$

Si $s' < n$: $G \neq \{0\}$

Pour $x = \sum_{i=s'+1}^{n} x_i e_i' \in G \setminus \{0\}$ on a $q(x) = \sum_{i=s'+1}^{n} \underbrace{q(e_i')}_{\leq 0} \underbrace{x_i^2}_{\geq 0} \leq 0$

Donc $F \cap G = \{0\}$

et si $s' = n$ ou $s = 0$ on a $F \cap G = \{0\}$

-> obtenons le résultat

$$\begin{aligned} \text{On a } \quad n &\geq \dim(F \oplus G) \quad \text{car } F \cap G = \{0\} \\ &= \dim(F) + \dim(G) \\ &= s + n - s' \end{aligned}$$

D'où $s' \geq s$

- On obtient $s \geq s'$ en inversant les rôles de s et s'.

ce qui conclut la preuve car $s = s'$, donc $t = t'$, d'où l'unicité □

12 min

Pour le théorème 2, ZROS p. 980

Notons (s,t) la signature de q. Et posons :

$$s' = \max_{E^+ \in \mathcal{P}} \dim(E^+) \quad \text{et} \quad t' = \max_{E^- \in \mathcal{N}} \dim(E^-)$$

En particulier $s \leq s'$ et $t \leq t'$.

• Mq $s = s'$:

Si $\mathcal{P} = \emptyset$: $s = s'$

Si $\mathcal{P} \neq \emptyset$: Prenons $F \in \mathcal{P}$ tq $\dim(F) = s'$

→ Remarquons que $q_{|F}$ est non deg.

En effet $q_{|F}$ est définie positive.

→ Concluons

Soit $(e_1, \dots, e_s)$ une base q-orthogonale de F, on peut compléter cette base en une ~~base~~ q-orthogonale de E $(e_1, \dots, e_n)$, en effet le lemme nous donne $E = F \oplus F^{\perp}$ car $q_{|F}$ non deg.

Par maximalité de F dans $\mathcal{P}$ on a que $q(e_{s'+1}) \leq 0, \dots, q(e_n) \leq 0$ donc par unicité de la signature $s = s'$

• De même on obtient $t = t'$

$\square$

Commentaires:

- Savoir démontrer thm de r_g
- Savoir utiliser algo. de Gauss.