

Leçons:
149, 157, 161

Thm:

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E . Posons $F = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$.
 $\forall x \in E, d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$

où $G(a_1, \dots, a_n) = \det(\langle a_i, a_j \rangle)$

références:
Cours: Courbes,
algèbre et proba

Inégalités de Hadamard:

$$1) \forall a_1, \dots, a_n \in E, G(a_1, \dots, a_n) \leq \prod_{k=1}^n \|a_k\|^2$$

$$2) \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n, |\det(a_1, \dots, a_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|a_k\|_2$$

(Dém. les 2 cas égalité ssi $a_1, \dots, a_n$ orthogonal)

Pour le théorème [GOU] p. 275

Prendons $x \in E$ et notons $y := p_F(x)$ (projection orthogonal sur F).

$$d(x, F) = \|x - y\|$$

On a $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \underbrace{\|x - y\|^2}_{\in F^\perp}$. Posons $\Gamma = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$

$$G(e_1, \dots, e_n, x) = \begin{vmatrix} & & & \langle e_1, x \rangle \\ & & & \vdots \\ & & & \langle e_n, x \rangle \\ \langle x, e_1 \rangle & \dots & \langle x, e_n \rangle & \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\|x\|^2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} & & & \langle e_1, y \rangle \\ & & & \vdots \\ & & & \langle e_n, y \rangle \\ \langle y, e_1 \rangle & \dots & \langle y, e_n \rangle & \|y\|^2 + \|x - y\|^2 \end{vmatrix} \quad x = \underbrace{x - y}_{\in F^\perp} + y$$

$$= \begin{vmatrix} & & & \langle e_1, y \rangle \\ & & & \vdots \\ & & & \langle e_n, y \rangle \\ \langle y, e_1 \rangle & \dots & \langle y, e_n \rangle & \|y\|$$

$$\underbrace{\|y\|}_{= \langle y, y \rangle} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \langle y, e_1 \rangle & \dots & \langle y, e_n \rangle & \|x - y\|^2 \end{vmatrix}$$

$$= G(e_1, \dots, e_n, y) + \|x - y\|^2 G(e_1, \dots, e_n)$$

Or $y \in F$ donc $(e_1, \dots, e_n, y)$ est liée donc $G(e_1, \dots, e_n, y) = 0$ (linéarité du p.s)

Par ailleurs si $G(e_1, \dots, e_n) = 0$ alors les colonnes de Γ sont liées, i.e. il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ tq $\forall i \in \{1, \dots, n\} \langle e_i, e_k \rangle = \sum_{p \neq k} \lambda_p \langle e_i, e_p \rangle$

$$\langle e_i, e_k \rangle = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Donc $e_k - \sum_{p \neq k} \lambda_p e_p \in F^\perp \cap F = \{0\}$

Donc $e_k = \sum_{p \neq k} \lambda_p e_p$ ce qui est absurde car $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

D'où $d(x, F)^2 = \|x - y\|^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$ *gmin en prenant* $\square$

Pour les inégalités :

1) Par récurrence sur n . $g_{\min}$ en étant trop

Init: $x_1 \in E$, $G(x_1) = |\langle x_1, x_1 \rangle| = \|x_1\|^2$

Hered: Soit $n \geq 1$, sup le résultat vrai pour n vecteurs.

Prendons $x_1, \dots, x_{n+1} \in E$ si $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est liée alors $G(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$
 Supposons alors cette famille libre (discrétion est ok)

Posons $F = \text{vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $y = p_F(x_{n+1})$

D'après le théorème précédent

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_{n+1}) &= G(x_1, \dots, x_n) \|x_{n+1} - y\|^2 \\ &\leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2 \|x_{n+1} - y\|^2 \quad \downarrow \text{H.R.} \\ &\leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2 (\|x_{n+1}\|^2 - \|y\|^2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{égalité si } \|y\| = 0 \\ \text{ie } y = 0 \text{ ie } x_{n+1} \in F^\perp \end{array} \right\} \\ &\leq \prod_{k=1}^{n+1} \|x_k\|^2 \end{aligned}$$

C6003 p.273 pour énoncé.

2) Prendons $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}^n$, $M = (x_1, \dots, x_n)$

$$|\det(x_1, \dots, x_n)|^2 = |\det(M)|^2 = |\det(t^t M)|$$

Int: Interprétation géométrique de 2)
 le volume maximal d'un parallélépipède est atteint lorsque les angles sont droits

$$\begin{aligned} &= \det(\langle x_j, x_k \rangle)_{1 \leq j, k \leq n} \quad \left. \begin{array}{l} \text{pour le p-o symétrique} \\ \end{array} \right\} \\ &= G(x_1, \dots, x_n) \\ &\leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2 \quad \square \end{aligned}$$