

Leçons:
149, 162, 170, 171,
181

Théorème:

- Séient A, B, C, D, E 5 points ^{distincts} d'un plan affine P .
1. Il existe une conique passant par ces points
 2. Cette conique n'est pas unique si 4 points sont alignés.
 3. Cette conique est non propre si 3 points parmi les 5 sont alignés.

Références:
LEIS: Eulien, géométrie
analytique classique.

Preuve 1)

- Si les 5 points sont alignés:

On peut prendre la droite qui passe par ces 5 points et une droite quelconque et c'est bon.

- Si non (i.e. pas tous alignés):

On peut par exemple supposer que (A, B, C) forment une base affine

→ On va donner l'équation d'une conique dans cette base

Séient (X, Y, Z) les coordonnées barycentriques dans (A, B, C) .

L'équation d'une conique en coordonnées barycentrique est: (Voir Lemme à la p. 10)

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + pXY + qXZ + rYZ = 0 \quad \text{où } a, b, c, p, q, r \in \mathbb{R}$$

Or notre conique passe par A, B, C donc par $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$
ainsi en évaluant on trouve $a = b = c = 0$. Donc notre conique est
de la forme:

$$pXY + qXZ + rYZ = 0$$

→ On va montrer que p, q, r sont solutions d'un certain système

Notons $D = (x_1, y_1, z_1)$ et $E = (x_2, y_2, z_2)$ les coords. barycentriques de D et E
dans notre repère affine (A, B, C) . On a alors que p, q, r sont sol.
du système:

$$(S): \begin{cases} px_1y_1 + qx_1z_1 + ry_1z_1 = 0 \\ px_2y_2 + qx_2z_2 + ry_2z_2 = 0 \end{cases}$$

qui est de rang ≤ 2 , donc ce système possède au max une sol.

i.e. il existe au max une conique passant par A, B, C, D, E .

Pour 2):

• Hq si la conique n'est pas unique alors 4 points sont alignés

→ Caractérisons le fait de ne pas être unique:

L'unicité d'une conique passant par 5 points équivaut (à constante multipliée près, mais ne change pas la conique) à ce que (S) est une unique sol.

c'est à dire à ce que $\dim(\text{Ker} \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 z_1 & y_1 z_1 \\ x_2 y_2 & x_2 z_2 & y_2 z_2 \end{pmatrix}) = 1$

c'est à dire que le rang de ce système soit 2. $S_{\min}$

Donc,

Cette conique n'est pas unique si le rang de (S) est ≤ 1
c'est à dire que les mineurs d'ordre 2 sont nuls. Ces mineurs sont :

$$\begin{vmatrix} x_1 y_1 & x_1 z_1 \\ x_2 y_2 & x_2 z_2 \end{vmatrix} = x_1 x_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 y_1 & y_1 z_1 \\ x_2 y_2 & y_2 z_2 \end{vmatrix} = y_1 y_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 y_1 & y_1 z_1 \\ x_2 y_2 & y_2 z_2 \end{vmatrix} = z_1 z_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

On fait volontairement apparaître les mineurs avec les coords de nos points.

$S_{\min}$

→ Hq D ou E appartiennent à (AB) ou (AC) ou (BC)

Par l'absurde, supposons que ce n'est pas le cas. Puisque D et E n'appartiennent ni à (AB), (AC), (BC)
c'est à dire $x_1 y_1, x_1 z_1, y_1 z_1 \neq 0$ (car aucune des coords n'est 0 dans (A,B,C) donc

On a alors que chacun des mineurs 3x3 sont nuls, ce qui veut dire que A, B, C $\in$ (DE) donc A, B, C sont alignés, ce qui est absurde.

→ Supposons (par ex.) que $D \in (AB)$, moy $E \in (AB)$:

On a alors $z_1 = 0$, puisque $D \neq A$ et $\neq B$ on a:
 $x_1 \neq 0$ et $y_1 \neq 0$

On a :

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 y_1 & 0 \\ x_2 y_2 & x_2 z_2 \end{vmatrix} = x_1 y_1 x_2 z_2 \quad \text{donc } x_2 z_2 = 0$$

De même on trouve

$$0 = x_1 y_1 y_2 z_2 \quad \text{donc } y_2 z_2 = 0$$

Si par ex. $z_2 \neq 0$ on a $x_2 = 0$ et $y_2 = 0$, mais alors $z_2 = 1$ donc $E = (0, 0, 1) = C$ qui est absurde.

Donc $z_2 = 0$, c'est à dire $E \in (AB)$. On a donc 4 points alignés.

• Réciproquement, Supposons que 4 points sont alignés alors il y a une infinité de droites passant par ces 4 points.

ex 3): ⚠ Soit

On va faire le lien entre une conique non deg. et la matrice de la forme quad
Notre conique est non deg. c'est à dire que la forme quadratique associée
à cette conique est non deg.

c'est à dire $pXY + qXZ + rYZ$ est non deg.

i.e.
$$\begin{vmatrix} 0 & p & q \\ p & 0 & r \\ q & r & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{i.e. } pqr \neq 0$$

$$2pqr$$

• Montrons l'équivalence par "négation":

→ Si $pqr = 0$:

Par ex. $p = 0$ donc notre conique est $Z(qX + rY) = 0$ qui

Preuve 3):

• [3] Si la conique n'est pas propre (et contient 5 points distincts)
or la classification des coniques c'est soit:

- une droite

et donc 3 points sont alignés.

- ou 2 droites parallèles

donc 3 points sont alignés

- ou 2 droites sécantes

et donc 3 points sont alignés.

• [4] Si 3 points parmi les 5 sont alignés

On a prouvé.

□

remarques:

Savoir faire classification conique

Savoir montrer:

Lemme:

Soit (A, B, C) un triangle non plat et $R = (A, \vec{AB}, \vec{AC})$ un repère affine.
L'équation générale d'une conique en coordonnées barycentriques dans
 (A, B, C) est :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + pxy + qxz + ryz = 0$$

Démo:

Soit H un point de coord (α, γ, β) dans (A, B, C) ses coord. cartésiennes
sont $\left(\frac{\gamma}{x+y+z}, \frac{\beta}{x+y+z} \right)$

L'éq d'une conique dans un repère cartésien est

$$\alpha_1 U^2 + \alpha_2 V^2 + \alpha_3 UV + \gamma_1 U + \gamma_2 V + \beta = 0$$

En remplaçant U, V par leurs expressions à l'aide des coord. barycentriques
en multipliant l'éq par $(x+y+z)^2$ et en regroupant on a le
résultat.