Leçons
101, 104, 106, 123, 152, 190, 150

Lemme 1:

$DP(E) = \{u \in GL(E) \mid u^{q-1} = Id\}$ (E $\mathbb{F}_q$-ev

Lemme 2

En posant $\Xi = \{(E_1, \dots, E_{q-1}) \mid E_k \text{ sev de } E, E = \bigoplus E_k\}$

$\varphi : DP(E) \longrightarrow \Xi$

$\quad u \longmapsto (\mathrm{Ker}(u - \lambda_k Id))_{1 \leq k \leq q-1}$ où $\mathbb{F}_q^\times = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$

est bijective

Théorème:

E $\mathbb{F}_q$-ev de dim. n

$$DP(E) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{q-1} \in \mathbb{N} \\ n_1 + \dots + n_{q-1} = n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_{n_1}(\mathbb{F}_q)| \cdots |GL_{n_{q-1}}(\mathbb{F}_q)|}$$

v2

Référence:
[ROM]: Rombaldi, Alg. et géo. agreg.

Pour le lemme 1 : [ROM] p.148 ~~(à faire à la fin si le temps)~~ à faire absolument pour 150
2min30

$\boxed{C}$ Soit $u \in DP(E)$.

u est diagonalisable donc Π_u est scindé à racines simples. Notons:

$$\Pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{spec}(u)} X - \lambda$$

Or $\mathrm{spec}(u) \subset \mathbb{F}_q^*$ car u est est un automorphisme

Donc $\Pi_u \mid \prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q^*} X - \lambda$, or $\prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q} X - \lambda = X^q - X$, donc $\prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q^*} X - \lambda = X^{q-1} - 1$

D'où $u^{q-1} - Id = 0$

$\boxed{D}$ Réciproquement, prenons $u \in GL(E)$ tq $u^{q-1} = Id$

On a $u^q = u$ d'où $u^q - u = 0$

Donc $X^q - X = \prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q} X - \lambda$ est un pol. annulateur de u, qui est scindé à racines simples, donc u est diagonalisable.

Pour le lemme 2 : [ROM] p.199 4min

• Montrons que φ est bien définie (dire bien def par lemme + lemme noyaux)

Il s'agit de mq $(\ker(u-\lambda_k Id))_{1\leq k\leq q-1} \in \mathcal{F}$, i.e

Mq $E = \bigoplus_{k=1}^{q-1} \ker(u-\lambda_k Id)$:

D'après lemme 1 on a, que pour tout $u \in \mathcal{D}\ell(E)$, u est annulé par $X^{q-1}-1 = \prod_{k=1}^{q-1} X-\lambda_k$.

D'après le lemme des noyaux on a le résultat.

• Mq φ est bijective : aller vite

→ Pour l'injectivité

Prenons $u,v \in \mathcal{D}\ell(E)$ tq $\varphi(u)=\varphi(v)$

Donc pour $k\in\{1,\dots,q-1\}$, $\ker(u-\lambda_k Id) = \ker(v-\lambda_k Id)$

Prenons x dans $\ker(u-\lambda_k Id)$, on a

$u(x) = v(x) = \lambda_k x$

On obtient $u=v$, car $E = \bigoplus_{k=1}^{q-1} \ker(u-\lambda_k Id)$

→ Pour la surjectivité

Prenons $(E_1,\dots,E_{q-1}) \in \mathcal{F}$ tq $u_{|E_k} = \lambda_k Id_{E_k}$

On a que u est diagonalisable et que $u \in Gl(E)$ car $\lambda_k \neq 0$ pour tout k.

Pour le théorème : [ROM] p.150-151

Le lemme 2 nous donne que $|\mathcal{D}\ell(E)| = |\mathcal{F}|$, à partir de maintenant le but est de dénombrer $\mathcal{F}$.

Pour cela, on remarque que

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\substack{m_1,\dots,m_{q-1}\in\mathbb{N} \\ m_1+\dots+m_{q-1}=n}} \underbrace{\{(E_1,\dots,E_{q-1})\in\mathcal{F} \mid \dim(E_k)=m_k\}}_{:= \mathcal{F}_{(m_1,\dots,m_{q-1})}}$$ (union disjointe

Maintenant qu'on a cette partition, il suffit de dénombrer un des $\mathcal{F}_{(m_1,\dots,m_{q-1})}$.

Pour cela on va définir une action :

$$\begin{aligned} Gl(E) \times \mathcal{F}_{(m_1,\dots,m_{q-1})} &\longrightarrow \mathcal{F}_{(m_1,\dots,m_{q-1})} \\ (u, (E_1,\dots,E_{m_{q-1}})) &\longmapsto (u(E_1),\dots,u(E_{m_{q-1}})) \end{aligned}$$

• Mq cette application est bien définie

Soit $u \in Gl(E)$ et $(E_1,\dots,E_{q-1}) \in \mathcal{F}_{(m_1,\dots,m_{q-1})}$. On a que

$$E = \bigoplus_{k=1}^{q-1} E_k \quad \text{et pour } k \in \{1,\dots,q-1\} \ \dim(E_k) = m_k .$$

On a que $E = u(E)$ car $u \in Gl(E)$ donc $E = \sum_{k=1}^{q-1} u(E_k)$
écrire $E = u(E) = \sum u(E_k)$
et puisque $\dim(u(E_k)) = \dim(E_k) = m_k$ on a :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{q-1} u(E_k) .$$

Donc $(u(E_1),\dots,u(E_{q-1})) \in \mathcal{F}_{(m_1,\dots,m_{q-1})}$

• Mq c'est bien une action (ne pas faire)

Soient $u, v \in Gl(E)$ et $(E_1,\dots,E_{q-1}) \in \mathcal{F}_{(m_1,\dots,m_{q-1})}$

$$\begin{aligned} \to u \circ (v.(E_k)_{1\le k\le q-1}) &= u \circ (v(E_1),\dots,v(E_{q-1})) \\ &= (u\circ v(E_1),\dots,u\circ v(E_{q-1})) \\ &= (u\circ v).(E_1,\dots,E_{q-1}) \end{aligned}$$

$\to Id.(E_1,\dots,E_{q-1}) = (E_1,\dots,E_{q-1})$

• Mq cette action est transitive (i.e n'a qu'une seule orbite)

Mq pour $(E_1,\dots,E_{q-1}) \in \mathcal{F}_{(m_1,\dots,m_{q-1})}$ on a $orb((E_1,\dots,E_{q-1})) = \mathcal{F}_{(m_1,\dots,m_{q-1})}$

C'est à dire, pour tout $(F_1, \dots, F_{m_{q-1}}) \in \mathcal{F}_{(m_1, \dots, m_{q-1})}$, il existe $u \in Gl(E)$ tq $u(E_k) = F_k$ pour tout k.

Prenons

$$\begin{cases} B = \bigcup_{k=1}^{q-1} B_k & \text{ou } B_k \text{ base de } E_k \\ B' = \bigcup_{k=1}^{q-1} B'_k & \quad B'_k \quad " \quad F_k \end{cases}$$

B et B' sont des base de E.

Puisque $\dim(E_k) = \dim(F_k)$ $(= m_k)$ on peut alors prendre $u \in Gl(E)$ tq $u(B_k) = B'_k$ et donc $u(E_k) = F_k$.

Venons en au dénombrement de $\mathcal{F}_{(m_1, \dots, m_{q-1})}$

• <u>Mq $|\mathcal{F}_{(m_1, \dots, m_{q-1})}|$</u> $= \dfrac{|Gl(E)|}{\prod_{k=1}^{q-1} |Gl(E_k)|}$

→ <u>Obtenons que $|\mathcal{F}_{(m_1, \dots, m_{q-1})}|$</u> $= \dfrac{|Gl(E)|}{|Stab((E_1, \dots, E_{q-1}))|}$

Pour $(E_1, \dots, E_{q-1}) \in \mathcal{F}_{(m_1, \dots, m_{q-1})}$ on a par l'équation aux classes

$$\underbrace{|orb(E_1, \dots, E_{q-1})|}_{= \mathcal{F}_{(m_1, \dots, m_{q-1})}} = \frac{|Gl(E)|}{|Stab((E_1, \dots, E_{q-1}))|}$$

(car action transitive)

→ <u>Mq $Stab((E_1, \dots, E_{q-1})) = \{u \in Gl(E) \mid u_{|E_k} \in Gl(E_k)\}$</u>

$Stab((E_1, \dots, E_{q-1})) = \{u \in Gl(E) \mid u(E_k) = E_k \text{ pour } k \in \{1, \dots, q-1\}\}$ (définition)

<u>⊂</u> Prenons $u \in Stab(E_1, \dots, E_{q-1})$
On a $u(E_k) = E_k$ donc $u_{|E_k} \in Gl(E_k)$

Si à l'oral ne pas faire

<u>⊃</u> Prenons $u \in Gl(E)$ tq $u_{|E_k} \in Gl(E_k)$
Donc $u(E_k) = E_k$.

→ <u>On obtient $|Stab((E_1, \dots, E_{q-1}))| = \prod_{k=1}^{q-1} |Gl(E_k)|$</u> par passage au cardinal.
et car $E_1, \dots, E_{q-1}$ est une partition de E.

• <u>On conclut en utilisant</u> le point précédent et que $|Gl(E)| = |S| = \sum |\mathcal{F}_{(m_1, \dots, m_{q-1})}|$