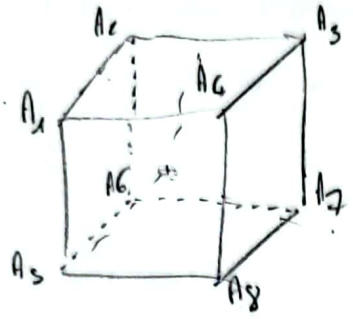
Leçons : 104, 101, 105, 161, 191

$I_S^+(\mathcal{C}) \simeq S_4$

Références
CROMS : Combaldi, ...
CALT1S : Histoire ... Tome 1, Calvez ...

Contexte : p.88 CROMS

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $A_1, \dots, A_8$ les points de coord $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ et $\mathcal{C}$ le cube suivant



$I_S(\mathcal{C})$ isométrie qui conservent le cube
$I_S^+(\mathcal{C}) = I_S(\mathcal{C}) \cap O^+(\mathbb{R}^3)$

On note S l'ensemble des sommets de ce cube.

On sait que $I_S(\mathcal{C}) = I_S(S)$. De plus $I_S^+(S) \to I_S^-(S)$ (*) où $\Delta = -Id$. (Idémo CROMS p.90)
$\rho \mapsto \rho \circ \Delta$

On en déduit l'isomorphisme ←

- Pour montrer le morphisme prendre f, g faire 4 cas selon si dans I_S^+ ou I_S^- penser que g et Δ commutent
- Injectivité par la déf prendre fg et mq $f = g$ (Δ inversible)
- Puis montrer égalité card $|I_S| = |I_S^+ \cup I_S^-| = 2|I_S^+|$ (*)

$$I_S(S) \to I_S^+(S) \times \{\pm Id\}$$
$$\rho \mapsto \begin{cases} (\rho, Id) \text{ si } \rho \in I_S^+ \\ (\rho \circ \Delta, \Delta) \text{ sinon} \end{cases}$$

[CALT1] p. 362

D'où $I_S(S) \simeq I_S^+(S) \times \frac{2\mathcal{L}}{2\mathcal{L}}$.

Le but maintenant est de mq $I_S^+(S) \simeq S_4$.

Etablissons un premier lemme

Lemme : (lemme 3.2 CROMS) ne pas faire p.91 CROMS

$f \in I_S^+(S)$ est entièrement déterminé par $f(A_i)$ et $f(A_j)$ où $i, j \in \{1, \dots, 8\}$ et tq $[A_i, A_j]$ est une arrête du cube

Sans perte de généralité on va se placer sur l'arrête $[A_1, A_2]$

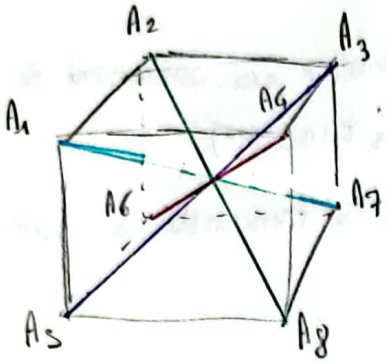
Prenons $f, g \in I_S^+(S)$ tq $f(A_1) = g(A_1)$ et $f(A_2) = g(A_2)$

Donc $f^{-1} \circ g(A_1) = A_1$ et $f^{-1} \circ g(A_2) = A_2$ et $f^{-1} \circ g \in I_S^+$

$f^{-1} \circ g$ est une rotation laissant fixes A_1 et A_2, donc laisse aussi fixe le plan engendré par (O, A_1, A_2). Donc $f^{-1} \circ g = Id$ car une rotation non triviale de $\mathbb{R}^3$ laisse fixe au mieux une droite. Finalement $f = g$ d'où le résultat. □

Mq $I_3^+(S) \simeq S_4$: p92 [ROM]

Notons $D = \{[A_1, A_7], [A_2, A_8], [A_3, A_5], [A_4, A_6]\}$ les grandes diag. du cube.
D_1 D_2 D_3 D_6



Si $f \in I_3^+(S)$, f induit une permutation de ces diagonales car f conserve les distances et que chaque point de S est envoyé sur un point de S.

Posons alors le morphisme suivant :

$$\phi : I_3^+(S) \longrightarrow S(D) \simeq S_4$$
$$f \longmapsto \sigma_f$$

où σ_f est tq $f(D_i) = D_{\sigma_f(i)}$

⚠ Dans [ROM] il restreint pas encore à I_3^+

Mq ϕ est une bijection :

- Mq ϕ est injectif :

Soit $f \in \ker(\phi)$, on a que f conserve les diagonales, $f(D_i) = D_i$.

Donc en particulier $f([A_1, A_7]) = \begin{cases} [A_1, A_7] \\ [f(A_1), f(A_7)] \end{cases}$

On a deux 2 cas $\begin{cases} f(A_1) = A_1 \\ f(A_7) = A_7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} f(A_1) = A_7 \\ f(A_7) = A_1 \end{cases}$

(on s'en fout du "sens" de la diago (et on a déjà vu avec les autres diag mais en regarder une suffit)

→ 1er cas : $f(A_1) = A_1$

Déjà on a $f([A_1, A_2]) = [f(A_1), f(A_2)]$. or $f(A_1) = A_1$

distances et les arrêtes.

Puisque les diagonales sont conservées $f(A_2) = A_2$ ou A_8

Donc $f(A_2) = A_2$.

$f(A_2) = A_2$, A_4 ou A_5 car f conserve car $f(D_2) = D_2$ ($f([A_2, A_8]) = [f(A_2), f(A_8)]$)

(Par un raisonnement similaire sur $[A_1, A_2]$ on a $f(A_4) = A_4$) ? inutile

D'après le lemme f est déterminée par $f(A_1)$, $f(A_2)$. Donc $f = Id$.

→ 2ème cas : Si $f(A_1) = A_7$.

$f([A_1, A_2]) = [\underbrace{f(A_1)}_{= A_7}, f(A_2)]$

Puisque f conserve les distances et les arrêtes on a $f(A_2) = A_3, A_6$ ou A_8

Puisque f conserve les diagonales $f(A_2) = A_2$ ou A_8

Donc $f(A_2) = A_8$

(Donc $f([A_1, A_2]) = [A_7, A_8]$) $\begin{cases} f(A_1) = A_7 = -A_1 \\ f(A_2) = A_8 = -A_2 \end{cases}$

D'après le lemme $f = -Id$ ce qui est impossible car $-Id \notin I_s^+(S)$

Donc $\ker(\Phi) = \{Id\}$ donc Φ est injectif.

jusqu'ici dans [ROM] p 92 détaillé preuve thm 3.22.

• Mq Φ est surjectif ici on reprend juste avant lemme 3.1

Pour cela on va mq $|I_s^+(S)| = |S_4| = 24$ ($4!$)

Définissons l'action

$$I_s^+(S) \times S \to S$$
$$(f, A_k) \mapsto f(A_k)$$

Mq cette action ① est transitive et que le stabilisateur d'un sommet ($|Stab(A_k)|$ ②) a 3 elts.

(ie une unique orbite qui est S) $\hat{=} I_s^+(S).A_k$

Avec l'équation aux classes on aura :

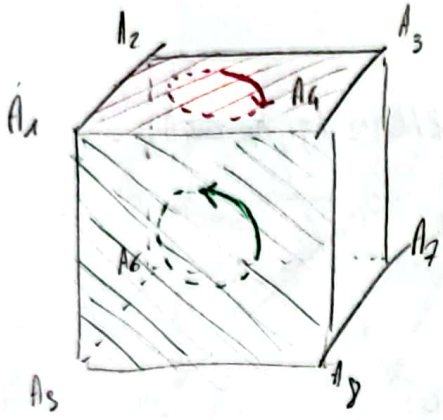
$$|I_s^+(S)| = |I_s^+(S).A_k| \, |Stab(A_k)| \quad (\star)$$
$$= |S| \, 3 = 8 \times 3 = 24$$

Montrons ① : (lemme 3.1 [ROM]) p.90 [ROM]

Prenons A_1 et regardons les rotations I_d, ρ_3, ρ_4

ρ_3 : Par rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ d'axe (z)

ρ_4 : " " $\frac{\pi}{2}$ d'axe (y)



Avec Id, ρ_3, ρ_4 on atteint toutes les points en partant de A_1

pas à dire faire dessin

Détail :

$Id(A_1) = A_1$, $\rho_3(A_1) = A_2$, $\rho_3^2(A_1) = A_3$, $\rho_3^3(A_1) = A_4$

$\rho_4(A_1) = A_5$, $\rho_4^2(A_1) = A_6$, $\rho_4^2\rho_3(A_1) = A_7$

$\rho_4^3\rho_3(A_1) = A_8$.

~~Donc $I_3^+(S)(A_1) = S$~~

Montrons ② ; (lemme 3.3 [ROM]) p.91 [ROM]

($f([A_1, A_2]) = [A_1, f(A_2)]$ et $f(A_2) = A_2, A_4$ ou A_5)

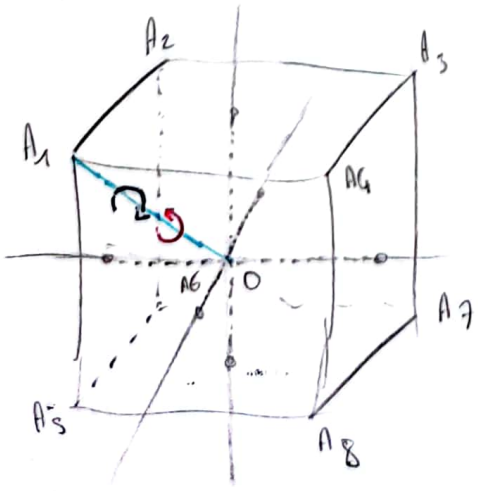
Soit $f \in I_3^+(S)$ tq $f(A_1) = A_1$ donc f permute A_2, A_4, A_5 (par conservation des distances.

Par lemme f est caract par $f(A_1) = A_1$ et $f(A_i)$ $i = 2, 4, 5$

$|stab(A_1)| = |\{f \in I_3^+(S) \mid f(A_1) = A_1\}| \leq 3$

$\leq$ car on sait pas si il y a un f_i qui envoie A_2 en A_2 et f_2 A_2 en A_4, f_3 A_2 en A_5

Mais en fait les rotations $\frac{2\pi}{3}$ d'axes (O, A_1) envoie A_2 en A_5 et A_2 en A_4. et $Id \in stab(A_1)$

D'où $|stab(A_1)| = 3$

On conclut avec (*)