

101, 103, 104, 105, 108

Lemme 1:

Pour $n \geq 3$, A_n est engendré par les 3-cycles

Lemme 2:

Pour $n \geq 5$, les 3-cycles sont conjugués dans A_n .

Théorème:

Pour $n \geq 5$, A_n est simple

References:

EROS: Rombaldi, Alg. et geo. pour l'alg.

EPERS: Perin, Cours d'algèbre

Pour le lemme 1: [EROS] p. 52

Soit G le sous groupe de S_n engendré par les 3-cycles.

• Mq $G \subset A_n$:

C'est vrai puisque la signature d'un 3-cycle est $(-1)^2 = 1$. En fait si on prend un produit de 3-cycles il suffit de se rappeler que la signature est un morphisme.

• Mq $A_n \subset G$:

Soit $\sigma \in A_n$, écrivons $\sigma = \prod_{i=1}^p \tau_i$. Puisque $\epsilon(\sigma) = 1$ on en déduit que p est pair.

Or le produit de 2 transpositions distinctes est un produit de 3-cycles en effet, prenons i, j, k, p distincts $3 \min$.

→ Soit $(i j)(k p) = (i j k)(j k p)$ (les 2 transpositions sont à support disjointes)
 → Soit $(i j)(k i) = (i k j)$ (un élément en commun dans leur support)
 Donc dans la décomposition de σ on peut "rassembler" par 2 les transpositions pour avoir que des 3-cycles car p est pair.

Pour le lemme 2: [EROS] p. 66-67 exo. 2.24 (2 min 30)

les 3-cycles sont conjugués dans S_n . Prenons $\gamma = (a_1 a_2 a_3)$ et $\gamma' = (a'_1 a'_2 a'_3)$ deux 3-cycles

Prenons $\sigma \in S_n$ tq $\sigma(a_i) = a'_i$, on a $\gamma' = \sigma \gamma \sigma^{-1}$

Si $\sigma \in A_n$ c'est ok.

Si non, puisque $n \geq 5$ on peut prendre a_4 et a_5 différents de a_1, a_2, a_3 . On alors que $\gamma' = \underbrace{(a_4 a_5)}_{\text{sign} = -1} \underbrace{\sigma}_{\text{sign} = -1} \gamma$ est de signature 1, donc dans A_n et $\sigma'(a_i) = a'_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$

□

Pour le théorème CROIS p. 52

Prendons H un sous groupe distingué de A_n différent de $\{Id\}$
L'objectif va être de montrer $H = A_n$.

Au vu des 2 lemmes, il suffit de montrer H contient un 3-cycle.

• Construisons une bonne permutation qui va nous aider

→ On va chercher un $\sigma \in H$ et un $\tau \in A_n$ qui ne commutent pas CROIS p. 66

Prendons $\sigma \in H \setminus \{Id\}$. Il existe $x \in \{1, \dots, n\}$ tq $y := \sigma(x) \neq x$.

Prendons $z \in \{1, \dots, n\} \setminus \{x, y, \sigma(y)\}$ (possible car $n \geq 5$)

On a $\tau = (x \ y \ z) \in A_n$ et on a
$$\begin{cases} \sigma \tau(x) = \sigma(y) \neq x \\ \tau \sigma(x) = \tau(y) = z \end{cases}$$

Donc σ et τ ne commutent pas

→ Prendons la bonne permutation et la regarder

Puisque H est distingué dans A_n on a que :

$$\sigma' := \underbrace{\sigma}_{\in H} \underbrace{\tau}_{\in A_n} \underbrace{\sigma^{-1}}_{\in H} \underbrace{\tau^{-1}}_{\in A_n} \in H$$

Et on a :

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma (x \ y \ z) \sigma^{-1} (z \ y \ x) \\ &= (\sigma(x) \ \sigma(y) \ \sigma(z)) (z \ y \ x) \\ &= (y \ \sigma(y) \ \sigma(z)) (z \ y \ x) \end{aligned}$$

σ' est produit de 2 3-cycles qui agissent sur $F = \{x, y, z, \sigma(y), \sigma(z)\}$ formé au plus de 5 éléments.

Remarquons déjà que $\sigma' \neq Id$ car σ et τ ne commutent pas.

• Décomposons σ' dans $S(F)$ en produit de cycle à support disjoints

cette décomp. est la même que dans S_n et puisque $\sigma' \in A_n \setminus \{Id\}$ on a 3 cas possibles :

→ σ' est un 3-cycle :

Et dans ce cas là c'est réglé.

→ σ' est le produit de 2 transpositions à supports disjoints Δ Erreur dans [ROM] 1.2.2

Notons les $\sigma' = (\alpha_1 \alpha_2)(\alpha_3 \alpha_4)$. Prenons $\alpha_5 \in \{1, \dots, m\} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$

Notons $Z = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5) \in A_m$

et posons $\sigma'' := [\sigma', Z] = \underbrace{\sigma'}_{\in H} \underbrace{(Z \sigma'^{-1} Z^{-1})}_{\in H} \in H$

$$\begin{aligned} \text{et } \sigma'' &= (\sigma'(\alpha_1) \sigma'(\alpha_2) \sigma'(\alpha_5)) (\alpha_5 \alpha_2 \alpha_1) \\ &= (\alpha_2 \alpha_1 \alpha_5) (\alpha_5 \alpha_2 \alpha_1) \\ &= (\alpha_2 \alpha_5 \alpha_1) \end{aligned}$$

et donc σ'' convient

→ σ' est un 5-cycle: Δ Erreur dans [ROM] 1.2.2 ed.

$$\sigma' = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5)$$

Posons $Z = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \in A_m$. Posons $\sigma'' = [\sigma', Z] \in H$

$$\begin{aligned} \text{et } \sigma'' &= (\sigma'(\alpha_1) \sigma'(\alpha_2) \sigma'(\alpha_3)) (\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1) \\ &= (\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) (\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1) \\ &= (\alpha_1 \alpha_4 \alpha_2) \end{aligned}$$

et σ'' convient

□

Commentaires:

Pour les cas $m \leq 5$:

$A_2 = \{\text{Id}\}$ donc distingué

$A_3 = \{\text{Id}, (123), (132)\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est simple

A_4 n'est pas simple car $D(A_4) = \{\text{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (PER) 1.3