

Leçons:

150, 151, 152,
154, 155, 156

Lemme:

Soit $u \in I(E)$. Prenons P un pol. annulateur de u
 tq $P = \beta H_1^{\alpha_1} \dots H_s^{\alpha_s}$ sa décomp. en irr.
 Pour $i \in \{1, \dots, s\}$ on note $V_i = \text{Ker}(H_i^{\alpha_i}(u))$.
 Alors on a, $E = \bigoplus_{i=1}^s V_i$ et pour $i \in \{1, \dots, s\}$
 la projection sur V_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} V_j$
 est un polynôme en u .

références:

[GOU]: Goursat,
 Alg. probab
 [ROM]: Rombaldi,
 Alg. géo. pour alg.

Théorème: Décomp. Dunford

Soit $u \in I(E)$. Si χ_u est scindé alors
 il existe un unique couple (d, n) tq
 $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$ où d est diagonalisable
 et n nilpotent. Et d, n sont des pol. en u .

Théorème: Appli. à l'exp. de matrice

Soit $A \in M_n(K)$ et $A = D + V$ sa décomp. de
 Dunford. Alors la décomp. de Dunford
 de e^A est $e^D + e^D(e^V - I_n)$.

Corollaire: (pas le temps)

Soit $A \in M_n(K)$ tq χ_A scindé.
 A est diagonalisable si e^A l'est

Pour le lemme, [GOU] p. 204

• Montrons que les V_i sont en somme direct

Cela vient du lemme des moyennes et que P est annulateur de u .

• Construisons nos projecteurs

Pour $i \in \{1, \dots, s\}$ posons $Q_i = \prod_{j \neq i} H_j^{\alpha_j}$, ainsi nos Q_i sont 1^{er} entre
 eux dans leur ensemble. Donc d'après le théorème de Bezout on a
 qu'il existe $U_1, \dots, U_s$ tq

$$U_1 Q_1 + \dots + U_s Q_s = 1$$

$$\text{D'où } \underbrace{U_1^0 Q_1(u)}_{:= p_1} + \dots + \underbrace{U_s^0 Q_s(u)}_{:= p_s} = \text{Id}$$

(*) Nos p_i seront nos projecteurs.

→ Vérifions que les p_i sont bien des projecteurs:

On a clairement que pour $i \neq j$, $P \mid Q_i Q_j$

Donc pour $i \neq j$, $p_i \circ p_j = Q_i Q_j(u) \circ U_i U_j(u) = 0$ (*) car $P \mid Q_i Q_j$ et $P(u) = 0$

Donc pour $i \in \{1, \dots, s\}$, $p_i = \sum_{j=1}^s p_j \circ p_i$ d'après (*)

Or d'après (**) on en déduit que $p_i = p_i^2$ 6 min 30

• Il reste à vérifier que ce sont bien les bons projecteurs

→ Vérifions que $\text{Im } p_i = V_i$ (ie p_i est la projection sur V_i)

□ Soit $x \in E$, posons $y = p_i(x)$, on a :

$$\begin{aligned} M_i^{\alpha_i}(u)(y) &= M_i^{\alpha_i}(u) \circ p_i(u)(x) \\ &= M_i^{\alpha_i}(u) \circ U_i(u) \circ Q_i(u)(x) \\ &= U_i(u) \circ \underbrace{P(u)}_{=0}(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $p_i(x) \in \text{Ker } M_i^{\alpha_i}(u) = V_i$

□ Réciproquement, soit $x \in V_i$.

D'après (*) on a $x = p_1(x) + \dots + p_s(x)$

Or pour $j \neq i$, puisque $p_j = U_j(u) \circ Q_j(u) = U_j(u) \circ \prod_{k \neq j} M_k^{\alpha_k}(u)$ on a $p_j(x) = 0$

Donc $x = p_i(x)$, d'où $x \in \text{Im } p_i$

D'où $\text{Im } p_i = V_i$ 6 min 45

→ Montrons que $\text{Ker } p_i = \bigoplus_{j \neq i} V_j$ (ie projection // à $\bigoplus_{j \neq i} V_j$)

□ Montrons que pour $j \neq i$, $V_j \subset \text{Ker } p_i$.

Soit $x \in V_j$, on a

$$p_i(x) = U_i(u) \circ Q_i(u)(x) = 0 \quad \text{car } M_j^{\alpha_j} \text{ est un facteur de } Q_i$$

D'où $V_j \subset \text{Ker } p_i$ pour tout $i \neq j$. Donc $\bigoplus_{j \neq i} V_j \subset \text{Ker } p_i$.

□ Réciproquement, montrons $\text{Ker } p_i \subset \bigoplus_{j \neq i} V_j$,

Soit $x \in \text{Ker } p_i$

$$x = \sum_{j \neq i} p_j(x) \quad \text{donc } x \in \bigoplus_{j \neq i} V_j$$

D'où l'égalité

On peut alors conclure car par construction nos p_i sont des p.p. en u .

Qmin. $\square$

Introduisons la décomposition de Dunford, [GOU] p.205

Existence

Construisons d :

$\rightarrow$ Appliquons le lemme à χ_u

$$\text{Notons } \chi_u = (-1)^n \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{\alpha_i}, \text{ posons } U_i := \text{Ker } M_i^{\alpha_i}.$$

Avec les notations précédentes, on a que pour $i \in \{1, \dots, s\}$, p_i est un projecteur sur U_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} U_j$.

$$\text{Posons } d := \sum_{i=1}^s \lambda_i p_i$$

$\rightarrow$ Vérifions que d est diagonalisable

On voit que chaque p_i est diagonalisable car ce sont des projecteurs. Il reste à savoir s'ils sont diagonalisables dans une même base. Mais cela est bien le cas car chaque p_i commute avec p_j . En effet pour $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

Donc par théorème de codiag. d est diagonalisable.

Construisons m :

Posons $m = u - d$. On a :

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=1}^s u \circ p_i - \sum_{i=1}^s \lambda_i p_i \\ &= \sum_{i=1}^s (u - \lambda_i \text{Id}) p_i \end{aligned}$$

Puisque pour $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$ et les p_i commutent avec u (car polynômes en u) par récurrence on obtient pour tout $q \in \mathbb{N}^*$

$$m^q = \sum_{i=1}^s (u - \lambda_i \text{Id})^q p_i$$

pour $i \in \{1, \dots, s\}$

En posant $q = \sup_{i \in \{1, \dots, s\}} \alpha_i$, on a $(u - \lambda_i \text{Id})^q p_i = ((x - \lambda_i)^q M_i(U_i))(u)$

$$\text{Donc } (u - \lambda_i \text{Id})^q p_i = 0$$

qu'on divise cette quantité

Donc m est nilpotent.

Ainsi d et m sont des pol. en u .

Unicité: (ne pas faire pour leçon exp. de matrice)

Soit (d', m') un autre couple vérifiant la décomp. de Dunford (pas forcément des pol. en u).

• My $d - d'$ est diagonalisable:

→ My d et m' commutent avec u

d et m' commutent entre elles, donc commutent avec $d' + m' = u$
donc commutent avec u

→ Appliquons thm de codiag

Puisque d et m sont des pol. en u , d' et m' commutent avec d et m
Donc $d - d'$ est diagonalisable par thm de codiag.

• My $m - m'$ est nilpotent

Soient p, q les indices de nilpotence de m et m'
on a $(m - m')^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} (-1)^k m'^k m^{p+q-k} = 0$
 $\uparrow$
 $m^p = 0$

• Concluons:

$d - d'$ est diag, nilpo donc $d - d' = 0$

D'où $d = d'$ et $m = m'$.

Pour l'application à l'exponentielle de matrice, [ROM] p. 751-752 à faire dans la leçon exp.

Puisque D et V commutent on a $e^A = e^{D+V} = e^D e^V$ où $e^V = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{V^k}{k!}$

• Développons e^A

$$\begin{aligned} e^A &= e^D \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} V^k \\ &= e^D \left(I_n + \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} V^k \right) \\ &= e^D \left(I_n + V \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} V^{k-1} \right) \\ &= e^D + V e^D \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} V^{k-1} \end{aligned}$$

↓ V et e^D commutent car pol. en A

En posant $W := e^D \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} V^{k-1}$

• Montrons que VW est nilpotent

V et W commutent car ce sont des pol. en A .
Donc $(VW)^q = V^q W^q = 0$

• Montrons que e^D est diagonalisable
C'est clair car D est diagonalisable

• Vérifions que $VW = e^D(e^V - I_n)$

$$\begin{aligned} VW &= V e^D \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} V^{k-1} \\ &= e^D \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} V^k \\ &= e^D \left(\underbrace{\sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} V^k}_{= e^V} - I_n \right) \end{aligned}$$

□

pour le corollaire, [ROUS p.752 (pas le temps)]

• Supposons que A est diagonalisable

Il est clair que e^A l'est (pas besoin que $\mathbb{K}$ soit séculé)

• Réciproquement, supposons que e^A est diagonalisable

Alors la partie nilpo. est nulle, donc $e^D(e^V - I_n) = 0$

Or e^D est inversible donc $e^V - I_n = 0$ donc $e^V = I_n$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} V^k = I_n \quad \text{d'où} \quad \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} V^k = 0$$

$$\text{Donc } P := \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} X^k \text{ est annulateur de } V$$

$$\text{Or le pol. min de } V \text{ est } X^q \text{ donc } X^q | P \text{ car } P = X \left(\sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} X^{k-1} \right)$$

Donc $q=1$ et donc $V=0$

D'où $A=D$ donc A est diagonalisable

□