Leçons:	Lemme:	Références:
106, 155, 157, 158	Pour $S \in S_n(\mathbb{R})$, $\|\|\|S\|\|\|_2 = \rho(S)$ Théorème: $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme	[CALT1]: Caldero, nouvelles histoires T1

Pour le lemme, [CALT1] p.351 (pour l'idée)

Prenons $S \in S_n(\mathbb{R})$, donc S est diagonalisable dans une base orthogonal $(v_1, \dots, v_n)$ tq

$$S = {}^tP \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P \qquad \text{avec } |\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Prenons un $x \in \mathbb{R}^n$ tq $\|x\|_2 = 1$ décomposons le dans la base (v_i) tq $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$.

On a $\|Sx\|_2 = \|\sum \lambda_i x_i v_i\|_2$

$$\leq \rho(S) \underbrace{\|\sum x_i v_i\|_2}_{=\|x\|_2 = 1}$$

Donc en passant au sup sur les $\|x\|_2 = 1$ on a (car borne atteinte pour $x = v_1$)

$\|\|\|S\|\|\|_2 = \rho(S)$. □

Pour le théorème, [CALT1] p.357.

- Mq cette application est bien définie

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $S = P^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_i) P$

Donc $\exp(S) = P \operatorname{diag}(e^{\lambda_i}) P^{-1} \in S_n(\mathbb{R})$

De plus les vp de $\exp(S)$ sont les $e^{\lambda_i} > 0$. Donc $\exp(S)$ est définie positive par critère de Sylvester. (c'est pas Sylvester enfait mdr)

- On a que $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est continue en tant que restriction d'une application continue.

• Mq cette application est surjective

Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ tq $B = P^{-1}\operatorname{diag}(\mu_i) P$
où les $\mu_i > 0$ (car $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$).

Posons $A = P^{-1}\operatorname{diag}(\ln(\mu_i)) P$, on a $\exp(A) = P^{-1}\operatorname{diag}(\mu_i) P$
D'où la surjectivité.

• Montrons l'injectivité

Soient $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ tq $\exp(A) = \exp(A')$
Il existe $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ tq $A = P^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_i) P$

→ Mq A commute avec A'

Par interpolation de Lagrange il existe un unique pol. $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$
tq $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$

On a :

$$\begin{aligned} Q(\exp(A')) &= Q(\exp(A)) \\ &= Q(P^{-1}\operatorname{diag}(e^{\lambda_i}) P) \\ &= P^{-1}\underbrace{Q(\operatorname{diag}(e^{\lambda_i}))}_{=\operatorname{diag}(\lambda_i)} P \\ &= A \end{aligned}$$

Or $Q(\exp(A'))$ est un polynôme en A' donc commute avec A', ainsi A commute avec A'.

→ Concluons en utilisant le théorème de co-diag

Puisque A, A' commutent et sont diagonalisables elles sont co-d
Il existe $P_0 \in Gl_n\mathbb{R}$ tq :

$$\begin{cases} A = P_0 \operatorname{diag}(\lambda_i) P_0^{-1} \\ A' = P_0 \operatorname{diag}(\mu_i) P_0^{-1} \end{cases}$$

Or $\exp(A) = \exp(A')$, d'où $P_0 \operatorname{diag}(e^{\lambda_i}) P_0^{-1} = P_0 \operatorname{diag}(e^{\mu_i}) P_0^{-1}$
donc $e^{\lambda_i} = e^{\mu_i}$ d'où $\lambda_i = \mu_i$

Finalement $A = A'$ d'où l'injectivité.

• Mq la réciproque de cette application est continue

Utilisons la caractérisation séquentielle de la continuité.

Prenons $(B_p) := (\exp(A_p)) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $B_p \to B = \exp(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il s'agit mq $A_p \to A$.

→ Mq (B_p) et (B_p^{-1}) sont bornées

(B_p) est convergente donc B_p est bornée pour $|||.|||_2$ (par ex. mais nous arrange). Notons c cette cste.

Par continuité de l'inverse matricielle (B_p^{-1}) est aussi bornée pour $|||.|||_2$. Notons $1/c'$ cette cste.

→ Mq (A_p) est bornée

D'après le lemme on a pour tout p :

$$\left| \begin{array}{l} |||B_p|||_2 = \rho(B_p) \\ |||B_p^{-1}|||_2 = \rho(B_p^{-1}) \end{array} \right.$$

Donc $$\left| \begin{array}{l} \rho(B_p) \leq c \\ \rho(B_p^{-1}) \leq \frac{1}{c'} \end{array} \right.$$

or $\mathrm{spec}\, B_p^{-1} = \{ \frac{1}{\lambda_i} \mid i \in \{1, \dots, n\} \}$ donc $\rho(B_p^{-1}) \geq \frac{1}{\lambda_i}$ pour tout i

D'où $\frac{1}{c'} \geq \frac{1}{\lambda_i}$ donc $c' \leq \lambda_i$ (car $c', \lambda_i > 0$).

D'où $\mathrm{Spec}(B_p) \subset [c', c]$

Donc $\mathrm{spec}(A_p) \subset [\ln(c'), \ln(c)]$ et donc par le lemme (A_p) est bornée pour $|||.|||_2$

→ Mq la seule v.a. de A_p est A et concluons

Prenons (A_{p_k}) une sous suite cv qui cv vers $\bar{A}$ (on peut car Bolzano-Weierstrass, car A_p est bornée)

Par continuité de l'exp. on a :

$$\exp(A_{p_k}) \to \exp(\bar{A})$$

Or $\exp(A_p) \to \exp(A)$ donc $\exp(A_{p_k}) \to \exp(A)$, par injectivité exp on a $\bar{A} = A$

Donc (A_p) a une seule v.a. A donc A_p cv vers A.

Donc par caract. seq. continuité. $\square$

<u>Commentaires</u>:

- Savoir mq :
  - → $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$
  - → B. W.
  - → CO. diag
  - → critère Sylvester