Nombre de zéros d'une équation différentielle

Leçons : 220, 221, 224

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre $(E) : y'' + qy = 0$. On suppose que $q \in \mathscr{C}^1([a,+\infty[, \mathbb{R}_+^*)$, que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sqrt{q(u)}\mathrm{d}u = +\infty$ et que $q'(x) = o_{+\infty}(q^{3/2}(x))$. On se donne une solution y non nulle de (E) et on cherche à obtenir un équivalent à l'infini de la fonction $N : x \mapsto \operatorname{Card}\{u \in [a,x] : y(u) = 0\}$.

Théorème 1

Sous ces hypothèses, on a

$$N(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{q(u)}\mathrm{d}u$$

Lemme 2

Soient y_1 et y_2 deux fonctions de $\mathscr{C}^1([a,+\infty[, \mathbb{R}_+^*)$ sans zéro commun. Alors si $w = y_1y_2' - y_2y_1'$ (Wronskien), et $y_1(a) + iy_2(a) = r_0e^{i\theta_0}$, il existe $r, \theta \in \mathscr{C}^1([a,+\infty[, \mathbb{R})$ tels que $y_1 = r\cos\theta, y_2 = r\sin\theta$ où $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ et $\forall x, \theta(x) = \theta_0 + \displaystyle\int_a^x \frac{w(t)}{r(t)^2}\mathrm{d}t$.

Démonstration. Posons $\varphi = y_1 + iy_2$. Par hypothèse, cette fonction ne s'annule pas donc $\psi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\mathrm{d}t + \ln r_0 + i\theta_0$ est bien définie et $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$.

De plus, un calcul rapide montre que $\left(\varphi e^{-\psi}\right)' = 0$ donc $\forall x, \varphi(x) = e^{\psi(x)}(\varphi(a)e^{-\psi(a)}) = e^{\psi(x)}(r_0e^{i\theta_0} \times r_0^{-1}e^{-i\theta_0} = e^{\psi(x)}$.

Donc

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= r_0e^{i\theta_0}\exp\left(\int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\mathrm{d}t\right) = r_0e^{i\theta_0}\exp\left(\int_a^x \frac{(y_1'+iy_2')(y_1-iy_2)(t)}{r^2(t)}\mathrm{d}t\right)\\
&= r_0e^{i\theta_0}\exp\left(i\int_a^x \frac{w(t)}{r^2(t)}\mathrm{d}t + \int_a^x \frac{(y_1'y_1+y_2'y_2)(t)}{r^2(t)}\mathrm{d}t\right)\\
&= r_0e^{i\theta_0}\exp\left(i\int_a^x \frac{w(t)}{r^2(t)}\mathrm{d}t + \ln r(x) - \ln r(a)\right) = r(x)e^{i\theta_0}\exp\left(i\int_a^x \frac{w(t)}{r^2(t)}\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

car $(r^2)' = y_1'y_1 + y_2'y_2$. Donc $\varphi(x) = r(x)e^{i\theta(x)}$ où $\theta(x) = \theta_0 + \displaystyle\int_a^x \frac{w(t)}{r^2(t)}\mathrm{d}t$.

□

Démonstration (du théorème)**. Étape 1 : changement de variable** : Posons $\tau(x) = \displaystyle\int_a^x \sqrt{q(u)}\mathrm{d}u$.

La fonction τ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, $\forall x \geqslant a, \tau'(x) = \sqrt{q(x)} > 0$ et $\tau(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, de sorte que τ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[a,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

Posons $Y = y \circ \tau^{-1}$. On a $\forall x > 0, y'(x) = Y'(\tau(x))\sqrt{q(x)}$ et $y''(x) = Y''(\tau(x))q(x) + Y'(\tau(x)) \times \dfrac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}$. Ainsi :

$$0 = y''(x) + q(x)y(x) = q(x)Y''(\tau(x)) + \frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}Y'(\tau(x)) + q(x)Y(\tau(x))$$

Posons pour $t \geqslant 0$, $\varphi(t) = \dfrac{q'(\tau^{-1}(t))}{2q^{3/2}(\tau^{-1}(t))}$. La fonction Y est donc solution de (E') : $Y'' + \varphi Y' + Y = 0$

Étape 2 : utilisons le lemme pour écrire $Y = r\sin\theta, Y' = r\cos\theta$. En effet, Y et Y' n'ont pas de zéro commun, car sinon, selon le théorème de Cauchy-Lipschitz , Y serait nulle. Donc $Y' = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta = r\cos\theta$ (équation (i)) et d'autre part $Y'' = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta = -\varphi r\cos\theta - r\sin\theta$ (équation (ii)).

L'opération $(i) \times \cos\theta + (ii) \times (-\sin\theta)$ donne $r\theta' = r + \varphi r\cos\theta\sin\theta$, d'où $\theta' = 1 + \varphi\cos\theta\sin\theta$. En particulier, comme $\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$, $|\theta'(t) - 1| \leqslant \frac{1}{2}|\varphi(t)|$.

Étape 3 : étude asymptotique. Puisque $\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ par hypothèse, θ' tend vers 1 à l'infini. Par intégration des équivalents, on a $\theta(t) \backsim t$.

Notons $M(t)$ le nombre de zéros de Y sur $[0, t]$, montrons que $M(t) \backsim \dfrac{t}{\pi}$ quand t tend vers $+\infty$.

Montrons d'abord par l'absurde que $M(t) < \infty$ pour tout t. Si il existait t_0 tel que $M(t_0) = \infty$, alors l'ensemble des zéros de Y dans $[0, t_0]$ aurait un point d'accumulation u. Soit $(u_n)_n$ suite de zéros de Y tendant vers u. Alors $0 = \dfrac{Y(u_n) - Y(u)}{u_n - u} \xrightarrow[n\to+\infty]{} Y'(u)$ ce qui contredit l'absence de zéro commun de Y et Y'. Donc pour tout t, $M(t) < \infty$.

Fixons $t_0 \geqslant 0$ tel que $\theta'(t) > 0$ sur $[t_0, +\infty[$. Alors

$$M(t) \backsim_{t\to+\infty} \operatorname{Card}\{u \in [t_0, t] : \sin\theta(u) = 0\} = \operatorname{Card}\{v \in [\theta(t_0), \theta(t)] : \sin v = 0\}$$

puisque θ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $[t_0, t]$ sur $[\theta(t_0), \theta(t)]$.

Donc $M(t) \backsim_{t\to+\infty} \operatorname{Card}\{k \in \mathbb{Z} : \theta(t_0) \leqslant k\pi \leqslant \theta(t)\} = \mathrm{E}\left(\dfrac{\theta(t)}{\pi}\right) - \mathrm{E}\left(\dfrac{\theta(t_0)}{\pi}\right)$, de sorte que

Or, on se convainc sans mal que $N(x) = M(\tau(x))$ donc

$$N(x) \backsim_{x\to+\infty} \frac{\tau(x)}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{q(u)}\mathrm{d}u$$

□

Remarque.
- Le jour de l'oral, faire le lemme technique rapidement ou l'admettre pour avoir assez de temps pour la suite.
- Si la condition $q' = o(q^3/2)$ n'est pas vérifiée, le résultat n'est plus vrai. Par exemple, si $q(x) = \dfrac{1}{4x^2}$, $q'(x) = -\dfrac{1}{2x^3}$, et $y'' + \dfrac{1}{4x^2}y = 0$ admet pour solution générale $\sqrt{x}(a + b\ln(x)), a, b \in \mathbb{R}$ – puisque $\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}\ln(x)$ sont solutions – qui s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}_+$.

Référence : Hervé QUEFFÉLEC et Claude ZUILY (2013). *Analyse pour l'agrégation*. 4e éd. Dunod p. 405