

153, 159, 156, 162, 26.

Lemme:

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$. Il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$

Théorème: Méthode itératives

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et u l'unique sol. de $Au = b$.

Prenons $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et $u_{k+1} = H^{-1}Nu_k + H^{-1}b$ où H et N sont tq $A = H - N$ avec $H \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

On a que:

(u_k) cv vers u si $\rho(H^{-1}N) < 1$

Références:

[DUM] Dumas, modélisation à l'échelle de l'équation.

V2

Pour le lemme, [DUM] p. 167

• Définissons une norme sur $\mathbb{R}^n$

Triagonalisons dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe alors $U \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tq $T = U^{-1}AU$.

→ Ecrivons T dans la base (e'_i) où $e'_i = S^{i-1}e_i$ avec $\begin{cases} S > 0 \\ (e_i) \text{ base canonique de } \mathbb{C}^n \end{cases}$

La matrice $D_S = \text{diag}(1, S, \dots, S^{n-1})$ est la matrice de passage de (e_i) à (e'_i) , donc

$$T_S := D_S^{-1} T D_S = (U D_S)^{-1} A (U D_S)$$

$$\text{où } T_S = \begin{pmatrix} t_{1,1} & S t_{1,2} & \dots & S^{n-1} t_{1,n} \\ & \ddots & & \\ (0) & & S t_{n-1,n} & \\ & & & t_{n,n} \end{pmatrix} \text{ où } (t_{ij}) = T_{1 \leq i,j \leq n}$$

→ Définissons la norme:

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \|x\| = \|(U D_S)^{-1} x\|_\infty$$

• Explicitons la norme subordonnée

Pour A de l'énoncé:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$= \sup_{x \neq 0} \frac{\|(U D_S)^{-1} A x\|_\infty}{\|(U D_S)^{-1} x\|_\infty}$$

$$\downarrow x = U D_S y$$

$$= \sup_{y \neq 0} \frac{\|(U D_S)^{-1} A U D_S y\|_\infty}{\|y\|_\infty}$$

$$= \|T_S\|_\infty$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=i}^n S^{j-i} |t_{i,j}| \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{max de la somme des coeff. sur les lignes} \\ \text{+ triang.} \end{array} \right\}$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \left(|t_{i,i}| + \sum_{j=i+1}^n S^{j-i} |t_{i,j}| \right) \quad \left. \begin{array}{l} \sum_{j=i+1}^n S^{j-i} |t_{i,j}| \xrightarrow{S \rightarrow 0} 0, \text{ donc pour } \varepsilon > 0 \\ \text{il existe } S > 0 \text{ tq cette qdt soit } \leq \varepsilon \end{array} \right\}$$

$$\leq \max(|\epsilon_i| + \epsilon) \\ = \rho(A) + \epsilon$$

□

Pour le théorème, cours p.167.

• Trouvons une expression de $e_k = u_k - u$

→ D'une part,

$$Au = b \quad \text{i.e.} \quad (M - N)u = b \quad \text{i.e.} \quad Mu - Nu = b$$

$$\text{on a } u = M^{-1}Nu + M^{-1}b$$

→ D'autre part,

$$u_{k+1} = M^{-1}Nu_k + M^{-1}b$$

→ Finalement,

$$e_{k+1} = M^{-1}N(u_k - u) \\ = M^{-1}N e_k$$

$$\text{D'où, par récurrence, } e_k = (M^{-1}N)^k e_0 \quad (e_0 = u_0 - u)$$

• Montrons l'équivalence

→ ⊆ Si $\rho(M^{-1}N) < 1$

Prenons $\epsilon > 0$, d'après le lemme il existe $n \in \mathbb{N}$ tq

$$\|M^{-1}N\| \leq \rho(M^{-1}N) + \epsilon \\ < \rho(M^{-1}N) \\ < 1 \quad \downarrow \text{hypothèse}$$

$$\text{Donc } \|e_k\| \leq \|M^{-1}N\|^k \|e_0\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{D'où } u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u$$

→ Réciproquement, par contraposé si $\rho(M^{-1}N) \geq 1$.

Prenons $\lambda \in \mathbb{C}$ une vp de $M^{-1}N$, telle que $|\lambda| \geq 1$.

Notons u_λ un $\vec{v}_p$ associé on a :

$$(M^{-1}N)u_\lambda = \lambda u_\lambda$$

Donc $(M^{-1}N)^k \mu_\lambda = \lambda^k \mu_\lambda \not\rightarrow 0$
 $k \rightarrow +\infty$

c'est à dire que

$(M^{-1}N)^k \operatorname{Re}(\mu_\lambda)$ ou $(M^{-1}N)^k \operatorname{Im}(\mu_\lambda)$ ne tend pas vers 0

Soit ce soit $\lambda^k \operatorname{Re}(\mu_\lambda)$, prenons $u_0 = u + \operatorname{Re}(\mu_\lambda)$,
 on a :

$$\begin{aligned} e_k &= (M^{-1}N)^k e_0 \\ &= (M^{-1}N)^k (u_0 - u) \\ &= (M^{-1}N)^k \operatorname{Re}(\mu_\lambda) \not\rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Commentaires :

- Toute norme provient elle d'une norme matricielle? Je pense pas.