Théorème de Sunyer i Balaguer

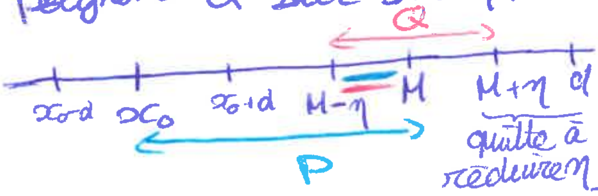
↳ Réf : Gourdon, p422-423

Théorème : (Sunyer i Balaguer) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = 0$. Alors f est un polynôme.

Preuve du théorème : Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = \{x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 0\}$ et on définit $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_n$ et $X = \mathbb{R} \setminus \Omega$. On va montrer que f est polynomiale sur chaque composante connexe de Ω, puis que X est vide (ainsi $\Omega = \mathbb{R}$ qui est connexe donc f est polynomiale).

▶ Supposons qu'au moins un $\mathring{F}_n$ soit non vide (en fait $\mathbb{R} = \bigcup_n F_n$, $\mathbb{R}$ est complet donc le théorème de Baire nous assure qu'il existe) et soit $]a,b[$ une composante connexe de Ω (ouverte car Ω l'est), et soit $[c,d]$ inclus dans $]a,b[$. Soit $x_0 \in [c,d]$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 \in \mathring{F}_{n_0}$, et donc il existe $\alpha > 0$ tel que $f^{(n_0)} = 0$ sur $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$. Ainsi il existe P un polynôme tel que $f = P$ sur cet intervalle. Montrons que $f = P$ sur $[c,d]$. On définit $M = \sup \underbrace{\{t \in]x_0, d] \mid \forall x \in [x_0, t], f(x) = P(x)\}}_{=:\Gamma}$ non vide donc M bien défini.

Montrons $M = d$. Supposons $M < d$. Puisque $M \in]c,d[\subset \Omega$, il existe $\eta > 0$ tel que f coïncide avec un certain polynôme Q sur $]M-\eta, M+\eta[$. Ainsi $P = Q$ sur $]M-\eta, M[\neq \emptyset$, donc $P = Q$ et ainsi $M+\eta \in \Gamma$, ce qui contredit le fait que M soit le sup de Γ. Ainsi $M = d$ et $f = P$ sur $[x_0, d]$, et le même raisonnement à gauche montre que $f = P$ sur $[c,d]$.



Ceci étant vrai pour tout segment de $]a,b[$, on en déduit que $f = P$ sur $]a,b[$ tout entier.

▶ La prochaine étape consistera à montrer que X est vide, mais nous avons besoin d'une étape intermédiaire : montrer que X est sans point isolé. Supposons que X admette un point isolé x_0. Cela signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\cap X = \{x_0\}$. Ainsi $]x_0-\varepsilon, x_0[\subset \Omega$ donc d'après le premier point, il existe P un polynôme tel que $f = P$ sur $]x_0-\varepsilon, x_0[$. De même, il existe Q un polynôme tel que $f = Q$ sur $]x_0, x_0+\varepsilon[$. Par continuité des dérivées successives de f, et de P et Q, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) = Q^{(n)}(x_0)$. Ainsi, en écrivant une formule de Taylor pour P et pour Q en x_0, on en déduit que $P = Q$, et donc $f = P$ sur $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, intervalle qui est donc inclus dans $\mathring{F}_{\deg(P)+1} \subset \Omega$, absurde car $x_0 \notin \Omega$.

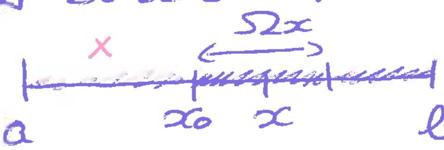
▶ Montrons maintenant que X est vide. Supposons $X \neq \emptyset$.
Puisque $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ par hypothèse, on a $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \cap F_n)$. Comme X est fermé dans $\mathbb{R}$ qui est complet, X est complet, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X \cap F_n$ est fermé dans X. Ainsi, d'après le théorème de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de $X \cap F_{n_0}$ pour la topologie induite de X soit non vide, c'est à dire :
$\exists n_0,\ \exists a < b \in \mathbb{R},\ ]a,b[\cap X \neq \emptyset$ et $]a,b[\cap X \subset F_{n_0}$.
Nous allons montrer que $]a,b[\subset \overset{\circ}{F}_{n_0}$, afin de parvenir à une contradiction (puisque $]a,b[\cap X \neq \emptyset$).
Soit $x \in]a,b[$.

* Si $x \in X$, alors $x \in F_{n_0}$, donc $f^{(n_0)}(x) = 0$. Et même plus que cela : x n'est pas isolé, donc il existe une suite de points distincts $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $]a,b[\cap X$ qui tend vers x, que l'on peut supposer strictement monotone (quitte à extraire une sous suite), par exemple croissante. Alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $f^{(n_0)}(x_p) = 0 = f^{(n_0)}(x_{p+1})$, donc d'après le théorème de Rolle, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists y_p \in]x_p, x_{p+1}[$, $f^{(n_0+1)}(y_p) = 0$ la suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de points distincts tendant vers x et annulant $f^{(n_0+1)}$. En itérant le procédé, on peut construire pour tout $n \geq n_0$, une suite de points distincts tendant vers x et annulant $f^{(n)}$. Par continuité, $f^{(n)}(x) = 0$ $\forall n \geq n_0$.

(on dirait que cette partie est inutile mais elle va servir dans le second cas)

on se ramène au cas précédent en allant sur les bords de Ω_x

* Si $x \in \Omega$, alors puisque $]a,b[\cap X \neq \emptyset$, la composante connexe Ω_x de x dans Ω possède au moins une extrémité x_0 dans $]a,b[$. D'après le premier point, il existe un polynôme P tel que $f = P$ sur Ω_x.



Or $x_0 \in X \cap]a,b[\subset F_{n_0}$, donc d'après ce qu'il précède, on en déduit que $\forall n \geq n_0$, $f^{(n)}(x_0) = 0$. Puisque f et P sont de classe C^∞, $\forall n \geq n_0$, $P^{(n)}(x_0) = 0$, ainsi $\deg(P) < n_0$ (en écrivant une formule de Taylor pour P en x_0). En particulier, $f^{(n_0)}(x) = 0$.

Dans les deux cas, on a obtenu $f^{(n_0)}(x) = 0$, donc $f^{(n_0)} = 0$ sur $]a,b[$, c'est à dire $]a,b[\subset \overset{\circ}{F}_{n_0}$, absurde.
Ainsi, X est vide, donc $\Omega = \mathbb{R}$ qui est connexe donc f est polynomiale sur $\mathbb{R}$.

Avant les remarques, quelques rappels sur le théorème de Baire :

Théorème (Baire) : Soit (E,d) un espace métrique complet, alors toute intersection dnb d'ouverts denses dans E est dense dans E, ie pour toute suite d'ouverts $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}, \overline{O_n}=E$, alors

$$\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n}=E.$$

En passant au complémentaire : toute réunion dnb de fermés d'intérieurs vides de E est d'intérieur vide dans E ie pour toute suite de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathring{F_n}=\emptyset$, alors $\overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}}=\emptyset$

Preuve : Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite d'ouverts denses dans E. Pour mtq $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\Omega_n}=E$, il faut mtq $\forall\Omega$ ouvert non vide de E, $\Omega\cap\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\Omega_n\right)\neq\emptyset$

Soit Ω ouvert non vide de E.
Soit $x_0\in\Omega$, $r_0>0$ tq $\overline{B(x_0,r_0)}\subseteq\Omega$. Comme $\overline{\Omega_1}=E$, $\Omega_1\cap B(x_0,r_0)\neq\emptyset$
$\exists x_1\in\Omega_1\cap B(x_0,r_0)$ et $r_1>0$, $\overline{B(x_1,r_1)}\subseteq\Omega_1\cap B(x_0,r_0)\subseteq\Omega_1\cap\Omega$
et l'on peut prendre $r_1\leq r_0/2$. On itère pour obtenir une suite (x_n) telle que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $x_n\in\Omega_n$, $r_n>0$ et

$\overline{B(x_{n+1},r_{n+1})}\subseteq\Omega_{n+1}\cap B(x_n,r_n)\subseteq\Omega_{n+1}\cap\Omega_n\cap\dots\cap\Omega_1$

et $r_{n+1}\leq r_n/2$.
Ainsi la suite est de Cauchy. Comme X est complet, elle possède une limite x, et $\forall n\geq1$,
$x\in\overline{B(x_n,r_n)}\subseteq\Omega_n\cap\dots\cap\Omega_1\cap\Omega$, donc $x\in\Omega\cap\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\Omega_n\right)$

Contre ex sans complétude : $\mathbb{Q}=\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\underbrace{\{x\}}_{\text{fermé d'intérieur vide}}$

⚠ L'union de fermés (resp l'intersect° d'ouverts) n'est pas forcément fermée (resp ouverte), ex : $[0,1[\,=\bigcap_{n\geq1}\,]-1/n,1[\,=\bigcup_{n\geq1}[0,1-\frac{1}{n}]$.

Remarques : * Côté application, outre le fait de caractériser les polynômes sur $\mathbb{R}$, ce qui est déjà cool, ça a servi pour le "théorème d'approximat° universelle" pour les réseaux de neurones, Pinkus a montré qu'EN GROS de ce que j'ai compris, on peut approximer une fct° continue (au sens d'uniforme sur tout compact) avec un réseau de neurones contenant au ⊖ une couche cachée dès que la fct° d'activat° n'est pas polynomiale (ce qui est globalement toujours le cas) ⇒ cf Wikipédia "thm d'approximat° universelle".
* Côté contre-exemple (sans complétude), j'en n'ai pas sous la main... Mais ça risque d'être des exemples tordues dans tous les cas alors...