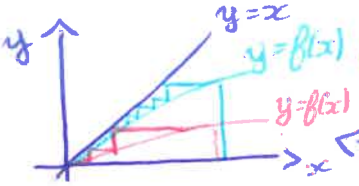
Développement asymptotique de suites définies par récurrence

↳ Réf : Bernis, p 149-153

Théorème : Soit $b>0$ et $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ continue et croissante telle que
* $f(0)=0$ et pour tout $x\in]0,b]$, $f(x)<x$
* il existe $\lambda>0$ et $r>1$ tels que $f(x)=x-\lambda x^r+\underset{x\to 0}{o}(x^r)$ (✱)

Alors pour tout $c\in]0,b[$, la suite $\begin{cases} u_0=c \\ u_{n+1}=f(u_n),\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$ est bien définie, converge vers 0 et on a l'équivalent $u_n\sim(n\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$

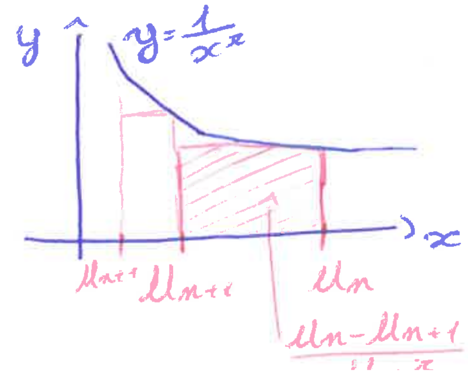
Application : Pour un $b\in\mathbb{R}_+^*$ (quelconque) et $f:x\mapsto\ln(1+x)$, on obtient le développement asymptotique : $u_n=\dfrac{2}{n}+\dfrac{2\ln(n)}{3n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$



Les hypothèses nous fournissent une fonction qui ressemble à ça. On voit que ⊕ r est petit, plus la CV est rapide
(r proche de 1, r grand)

Preuve du théorème : Tout d'abord, f est croissante et nulle en 0, donc si elle s'annulait en un point $y\in]0,b[$, alors elle serait nulle sur $[0,y]$, ce qui contredirait le développement limité (✱) (par unicité du DL).
Ainsi d'après les autres hypothèses, on obtient : $\forall x\in]0,b[$,
$0<f(x)<x<b$. Ainsi f laisse $]0,b[$ stable, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien contenue dans $]0,b[$ et donc bien définie.
De plus, par hypothèse, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)<u_n$, donc la suite est décroissante, et minorée par 0, ainsi elle converge vers $l\in[0,b]$. Puisque f est continue, l est un point fixe de f sur $[0,b]$.
Ainsi $l=0$, c'est à dire $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Passons à la recherche de l'équivalent. Le DL nous permet d'obtenir $u_{n+1}=u_n-\lambda u_n^r+\underset{n\to+\infty}{o}(u_n^r)$, donc $u_{n+1}-u_n=-\lambda u_n^r+\underset{n\to+\infty}{o}(u_n^r)$.
Or on a vu que $(u_n)_{n\geq0}$ ne peut pas s'annuler, d'où
$\dfrac{u_n-u_{n+1}}{u_n^r}\underset{n\to+\infty}{\sim}\lambda$. Essayons d'interpréter le terme de gauche géométriquement.



Puisque $u_n-u_{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, on a envie de dire que $\dfrac{u_n-u_{n+1}}{u_n^r}\underset{n\to+\infty}{\overset{?}{\sim}}\displaystyle\int_{u_{n+1}}^{u_n}\frac{dt}{t^r}=\frac{1}{1-r}\left(u_n^{1-r}-u_{n+1}^{1-r}\right)$

et on obtiendrait alors $u_{n+1}^{1-r}-u_n^{1-r}\underset{n\to+\infty}{\sim}\lambda(r-1)$,
ce qui permettrait de conclure par sommation.
Étudions donc le membre de droite.

On a $u_{n+1}^{1-\pi} - u_n^{1-\pi} = f(u_n)^{1-\pi} - u_n^{1-\pi} \underset{n\to+\infty}{=} \left(u_n - \lambda u_n^{\pi} + o(u_n^{\pi})\right)^{1-\pi} - u_n^{1-\pi}$

$$= u_n^{1-\pi}\Big(\underbrace{\big(1 - \lambda u_n^{\pi-1} \underset{n\to+\infty}{+} o(u_n^{\pi-1})\big)^{1-\pi}}_{(1+x)^{1-\pi} = 1+(1-\pi)x+o(x)} - 1\Big)$$

$$= u_n^{1-\pi}\left((\pi-1)\lambda u_n^{\pi-1} \underset{n\to+\infty}{+} o(u_n^{\pi-1})\right)$$

$$= \lambda(\pi-1) \underset{n\to+\infty}{+} o(1)$$

Ainsi $u_{n+1}^{1-\pi} - u_n^{1-\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda(\pi-1)$, et l'on a obtenu ce que l'on avait "deviné" géométriquement.

On peut maintenant appliquer le théorème de sommation des équivalents pour des séries divergentes à termes positifs, et ainsi par télescopage :

$$u_n^{1-\pi} - u_0^{1-\pi} = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^{1-\pi} - u_k^{1-\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(\pi-1) = n\lambda(\pi-1).$$

Et puisque $\pi > 1$, $u_n^{1-\pi} - u_0^{1-\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^{1-\pi}$, d'où $u_n^{1-\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\lambda(\pi-1)$, et ainsi en prenant la puissance $\frac{1}{1-\pi}$ (compatible avec les $\sim$) :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(n\lambda(\pi-1)\right)^{\frac{1}{1-\pi}}}.$$

<u>Brève applications</u> : 1) Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. On s'intéresse à

$f : [0,b] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(1+x)$

Alors f est bien continue et croissante, $f(0) = 0$ et par stricte concavité du logarithme, on a bien $f(x) < x$ pour tout $x \in [0,b]$. Enfin, on a le DL : $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, d'où ✻ avec $\pi = 2$ et $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ainsi d'après le théorème : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$. Pour affiner le développement asymptotique, nous allons reprendre l'étude de $u_{n+1}^{1-\pi} - u_n^{1-\pi} = u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1}$:

$$u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} = f(u_n)^{-1} - u_n^{-1} = \left(u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{3}u_n^3 \underset{n\to+\infty}{+} o(u_n^3)\right)^{-1} - u_n^{-1}$$

$$= u_n^{-1}\Big(\underbrace{\big(1 - \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}u_n^2 \underset{n\to+\infty}{+} o(u_n^2)\big)^{-1}}_{(1-x)^{-1} \text{ où } x = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}u_n^2 + o(u_n^2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} - 1\Big)$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$$

$$= u_n^{-1}\left(\frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}u_n^2 + \frac{1}{4}u_n^2 \underset{n\to+\infty}{+} o(u_n^2)\right)$$

Ainsi $u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} u_n + \underset{n \to +\infty}{o}(u_n)$.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} - \frac{1}{2}$. Alors on a d'après ce qui précède : $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{12} u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{6n}$.

On applique le théorème de sommation des équivalents pour des séries divergentes de signe constant et on obtient d'une part :

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{6} \ln(n).$$

(cf dev sur formule d'Euler Maclaurin)

Et d'autre part : $\sum_{k=0}^{n-1} x_k = u_n^{-1} - u_0^{-1} - \frac{n}{2}$.

Donc $\underbrace{u_n^{-1} - u_0^{-1}}_{\underset{n\to+\infty}{=o(\ln(n))}} = \frac{n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \frac{n}{2} - \frac{1}{6} \ln(n) + \underset{n \to +\infty}{o}(\ln(n))$, et ainsi

$$u_n = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{6} \ln(n) + \underset{n \to +\infty}{o}(\ln(n))\right)^{-1} = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{\ln(n)}{3n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)^{-1}$$

$$= \frac{2}{n}\left(1 + \frac{\ln(n)}{3n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

Et ainsi $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2}}$.

<u>Remarques</u> : * On peut aussi utiliser le théorème à la fonction sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$

* On peut adapter la méthode à une suite DV, par ex avec $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x + \exp(-x^2)$, la suite $(u_n)_n$ DV et cette fois ci, via la même méthode, on obtient $1 = (u_{n+1} - u_n) e^{u_n^2} \underset{n \to +\infty}{\overset{?}{\sim}} \int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{t^2} dt$

Problème ! On ne connait pas de primitive de e^{t^2}

(si ça avait été e^t par ex, on aurait conclu $1 \overset{?}{\sim} e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$ et roulez jeunesse ! Plus qu'à refaire la même méthode !)

→ on fait une IPP pour obtenir un ~ :

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{t^2} = \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{2te^{t^2}}{2t} = \left[\frac{e^{t^2}}{2t}\right]_{u_n}^{u_{n+1}} + \underbrace{\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{e^{t^2}}{2t^2}}_{= o\left(\int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{t^2}\right)}$$

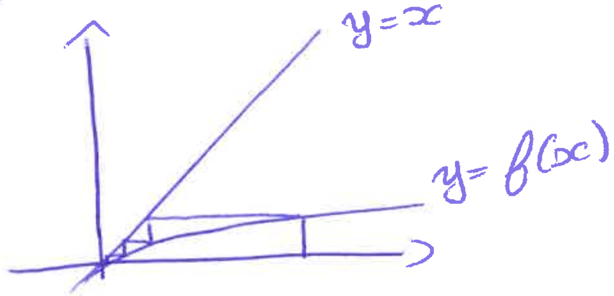
cette technique d'IPP permet aussi par ex de donner un équivalent de $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$!

$$\to \int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{t^2} dt \sim \frac{e^{u_{n+1}^2}}{2u_{n+1}} - \frac{e^{u_n^2}}{2u_n}$$

On étudie le terme de droite pour obtenir le résultat rigoureusement et hop on applique la même méthode ! (cf Bernis)

* On peut adapter la méthode à une fonct° f ayant un DL de la forme $f(x) = Kx - \lambda x^{r} + o(x^{r})$ où $K \in]0,1[$ et $r > 1$.
Le point de départ est $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim K$, donc en passant au log puis en sommant on obtient $\log(u_n) - \log(u_0) \sim n\log(K)$, on a envie de dire $u_n \sim u_0 K^n$ maiiis on n'a pas le droit, il faut raffiner (et ça demande beaucoup de calculs), mais au final on parvient tout de même à une suite géométrique (CV rapide !)

$\Rightarrow$ cf Bernis sur un exemple.



(cf doc de Wolff pour les précisions).