Equation de Bessel

↳ Réf : FGN Analyse 4 p 101-103

Théorème : On note (E) l'équation de Bessel : $xy'' + y' + xy = 0$.
Alors 1) Il existe une unique solution f_0 de (E) sur $\mathbb{R}$ développable en série entière en 0 et valant 1 en 0. Il s'agit de $f_0(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n n!^2} x^{2n}$

2) Soit f une solution de (E) sur $]0,a[$. Alors (f, f_0) est libre si et seulement si f n'est pas bornée au voisinage de 0. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(\theta))\,d\theta$.

Preuve du théorème : Avant de commencer, remarquons que le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire indique que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ (respectivement sur $\mathbb{R}_-^*$) est de dimension 2. Cependant on ne sait rien a priori sur le recollement en 0. Passons au premier point.

1) Nous allons procéder par analyse synthèse.

Analyse : Soit f une solution de (E) développable en série entière au voisinage de 0. Alors il existe $R>0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tels que $\forall x \in]-R,R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors pour $x \in]-R,R[$,

on a
$$\begin{cases} xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ xf''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n \end{cases}$$

et ainsi
$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left[(n+1)n a_{n+1} + (n+1) a_{n+1}\right]}_{(n+1)(n+1)a_{n+1}} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n$$
$$= 0 \quad \text{puisque } f \text{ est solution de } (E).$$

Par unicité du développement en série entière, on a
$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \geq 1,\ (n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \end{cases} \quad \text{ie} \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)^2 a_{n+2} + a_n = 0. \end{cases}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \times a_0}{(2n)^2(2n-2)^2 \cdots 2^2} = \frac{(-1)^n a_0}{4^n (n!)^2}$$ (valable aussi pour $n=0$)

Synthèse : Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

Alors $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{4^n (n!)^2 |x|^2}{4^{n+1}((n+1)!)^2} = \frac{|x|^2}{4(n+1)!^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, pour tout $a_0 \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_0 \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$ a un rayon de convergence infini.

En particulier pour $a_0 = 1$: $f_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$ est définie sur $\mathbb{R}$, vérifie $f(0) = 1$ et puisque ses coefficients vérifient l'équation établie précédemment, f est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, f_0 est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ DSE en 0 et valant 1 en 0.

2) "$\Leftarrow$" Supposons que (f, f_0) soit liée. La fonction f_0 est continue sur $\mathbb{R}$ donc bornée au voisinage de 0, et ainsi f l'est aussi.

"$\Rightarrow$" Supposons maintenant que (f, f_0) soit libre.

Sur $]0, a[$, (E) est équivalente à $y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, l'ensemble des solutions à (E) sur $]0, a[$ est donc un espace vectoriel de dimension 2, et (f, f_0) en est donc une base.

On considère le Wronskien $W = \begin{vmatrix} f & f_0 \\ f' & f_0' \end{vmatrix} = f f_0' - f_0 f'$. Alors W ne s'annule jamais puisque (f, f_0) est une base de solutions. De plus, pour $x \in]0, a[$,

$$W'(x) = \cancel{f'(x) f_0'(x)} + f(x) \underbrace{f_0''(x)}_{= -\frac{1}{x} f_0'(x) - f_0(x)} - f_0'(x) f'(x) - f_0 \underbrace{f''(x)}_{= -\frac{1}{x} f'(x) - f(x)}$$

$$= -\frac{1}{x} W(x).$$

Ainsi, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0, a[$, $W(x) = c e^{-\ln(x)} = \frac{c}{x}$, avec c non nul car W n'est pas nulle.

Ainsi pour tout $x \in]0, a[$, $f(x) f_0'(x) - f_0(x) f'(x) = \frac{c}{x}$.

Supposons que f soit bornée au voisinage de 0. Alors puisque $\lim_{x \to 0} f_0(x) = f_0(0) = 1$ et $\lim_{x \to 0} f_0'(x) = f_0'(0) = 0$, on a $f'(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{-c}{x}$.

Soit $b \in]0, a[$. La fonction $x \mapsto \frac{-c}{x}$ garde un signe constant sur $]0, b]$ et n'est pas intégrable sur $]0, b]$. Ainsi par intégration des relations de comparaison, on obtient :

$$f(b) - f(x) = \int_x^b f'(t)\,dt \underset{x \to 0}{\sim} \int_x^b -\frac{c}{t}\,dt = -c(\ln(b) - \ln(x)).$$

D'où $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -c \ln(x)$, donc $\lim_{x \to 0} f(x) = \pm\infty$, ce qui contredit f bornée.

Donc f n'est pas bornée au voisinage de 0. D'où l'équivalence.

Pour montrer l'autre formule pour f_0, nous allons montrer que la fonction définie par le terme de droite est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ (et est bornée au voisinage de 0)

(Bonus)

On définit $g : x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin(\theta))\,d\theta$.

La fonction $x \mapsto \cos(x\sin(\theta))$ est de classe C^2 (et même C^∞), et ses dérivées sont bornées sur le compact $[0,\pi]$, donc g est de classe C^2 (et même C^∞) par théorème de dérivation sous l'intégrale et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$g'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(\theta)\sin(x\sin(\theta))\,d\theta \quad \text{et} \quad g''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(\theta)\cos(x\sin(\theta))\,d\theta.$$

Alors $$xg''(x)+g'(x)+xg(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{x\cos^2(\theta)\cos(x\sin(\theta)) - \sin(\theta)\sin(x\sin(\theta))}_{\text{dérivée de } \sin(x\sin(\theta))\cos(\theta)}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[\sin(x\sin(\theta))\cos(\theta)\Big]_0^{\pi} = 0$$

Donc g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et est bornée au voisinage de 0, donc f_0 et g sont liées sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+$ par continuité. Or $f_0(0)=g(0)=1$, donc $f_0=g$ sur $\mathbb{R}_+$, et donc $f_0=g$ sur $\mathbb{R}$ par parité.

Avant les remarques, quelques rappels sur le wronskien :

On note (H) $Y' = A(t)Y$ où $A : I \mapsto M_n(\mathbb{K})$ C^∞.

Si $V_1,\dots V_n$ sont n solut° de (H), on appelle wronskien de $V_1,\dots V_n$ l'applicat° $W = \det(V_1,\dots V_n)$ (donc si on vectorialise $y^{(p)} = a_{p-1}y^{(p-1)}+\dots+a_0 y$, ⊛ le wronskien de $v_1,\dots v_p$ est $W(v_1,\dots v_p) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_p \\ v_1' & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1^{(p-1)} & \dots & \dots & v_p^{(p-1)} \end{vmatrix}$.)

Alors $V_1,\dots V_n$ base de solut° de H ssi $\exists t_0\in I$, $W(t_0)\neq 0$ ssi $\forall t\in I$, $W(t)\neq 0$.

De plus (on le remontre ici dans notre cas), W vérifie $W' = \mathrm{Tr}(A(t))W$, donc dans le cas de ⊛, $W' = a_{p-1}(t)W$.

<u>Remarques</u> : * On a en fait montré que f_0 est l'unique solution de classe C^2 de (E) sur $\mathbb{R}$ valant 1 en 0 (et que l'ensemble des solutions C^2 de (E) sur $\mathbb{R}$ est l'espace vectoriel engendré par f_0).

* Le point 1) montre en fait plus fort que la conclusion que l'on en fait ici : toute fonction solution de (E) sur $]-\pi,\pi[$ étant DSE en 0 sur cet intervalle est de la forme $c\times f_{0|]-\pi,\pi[}$, et on peut même étendre pour des fonctions solutions de (E) sur $]a,b[$, où $a<0<b$, étant DSE au voisinage de 0 (mais on n'a pas besoin d'autant de précision).

* En développement le cos de g en série entière, et en faisant les interversions nécessaires avant d'identifier, on pourrait déduire de la formule

obtenue pour f la valeur de l'intégrale de Wallis $\int_0^{\pi} \sin^{2n}(x)\, dx$.

$\alpha \in \mathbb{R}_+$

* L'équation de Bessel se généralise : $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \alpha^2) y = 0$ (E_α)

Alors la fonction $J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$ est solut° sur $\mathbb{R}$ de (E_n)

(et plus généralement pour α non entier $J_\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}$)

Sur $\mathbb{R}_+^*$, on sait que l'espace des solut° est de dimension 2,

- si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, J_α et $J_{-\alpha}$ forment une base de solution
- si $\alpha \in \mathbb{Z}$, une base de solut° est donnée par J_n et Y_n définie par

$Y_n(x) = \lim_{\alpha \to n} \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$ et alors Y_n explose en 0.

* L'équation de Bessel apparaît dans de nombreux problèmes physiques (Bessel était d'ailleurs aussi physicien et astronome) : l'étude des ondes, des vibrations d'une membrane circulaire, les fibres optique, la diffraction, le pendule de Bessel, etc etc

↳ pendule dont la longueur (du fil) varie de façon affine, l'angle vérifie une équation de Bessel