Calcul des $\zeta(2k)$

↳ Réf : FGN Analyse 2 p311-313.

Théorème : Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\zeta(2k) = (-1)^{k-1}\dfrac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}b_{2k}$, où les $(b_k)_{k\geq 0}$ sont les nombres de Bernoulli. (Formule d'Euler)

Preuve du théorème : On note φ_z la fonction 2π-périodique définie par $\varphi_z(x) = \exp\left(\frac{zx}{2\pi}\right)$ pour $x\in]-\pi,\pi]$, où $z\in\mathbb{C}\setminus 2i\pi\mathbb{Z}$.

On définit de plus $f : \begin{array}{l}\mathbb{C}\setminus 2i\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}\\ z \mapsto \frac{z}{e^z-1}\end{array}$. Nous allons utiliser la série de Fourier de φ_z afin d'en déduire le développement en série entière de f en 0, et on pourra alors faire le lien avec les nombres de Bernoulli. Soit $z\in\mathbb{C}\setminus 2i\pi\mathbb{Z}$.

La fonction φ_z est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc elle est en particulier dans $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on peut donc calculer ses coefficients de Fourier.

Soit $n\in\mathbb{Z}$, alors on a :

$$C_n(\varphi_z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_z(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x\left(\frac{z}{2\pi}-in\right)}dx \quad \left(\frac{z}{2\pi}-in\neq 0 \text{ car } z\notin 2i\pi\mathbb{Z}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{\frac{z}{2\pi}-in}\left[e^{x\left(\frac{z}{2\pi}-in\right)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{z-2i\pi n}\times\left(e^{\frac{z}{2}}e^{-in\pi} - e^{-\frac{z}{2}}e^{in\pi}\right) = \frac{(-1)^n\left(e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}\right)}{z-2i\pi n}.$$

Comme φ_z est C^1 par morceaux, d'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge en tout point $x\in\mathbb{R}$ vers $\frac{\varphi_z(x+0)+\varphi_z(x-0)}{2}$ (où $\varphi_z(x+0) = \lim\limits_{\substack{y\to x\\ >}}\varphi_z(y)$ et $\varphi_z(x-0) = \lim\limits_{\substack{y\to x\\ <}}\varphi_z(y)$).

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\frac{1}{2}\left(\varphi_z(x+0)+\varphi_z(x-0)\right) = \left(e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}\right)\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{inx}}{z-2i\pi n}$

Pour faire apparaître f, nous allons regarder le résultat obtenu pour $x=\pi$:

$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}\right) = \left(e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}\right)\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-2i\pi n}$. Or $z\notin 2i\pi\mathbb{Z}$, donc $e^{z/2}-e^{-z/2}\neq 0$,

alors $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-2i\pi n} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} = \frac{1}{2}\times\frac{e^z+1-1+1}{e^z-1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{e^z-1}.$$

Ainsi, pour $z\in\mathbb{C}\setminus 2i\pi\mathbb{Z}$, on a

$$f(z) = \frac{z}{e^z-1} = z\left(-\frac{1}{2}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-i2\pi n}\right).$$

Or $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-i2\pi n} = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z-i2\pi n}+\frac{1}{z+i2\pi n} = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2+4\pi^2n^2}$$

Ainsi $f(z) = z\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2+4\pi^2n^2}\right) = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2}$.

Pour obtenir un développement en série entière de f, il nous reste à développer la dernière somme entière.

Pour cela nous allons développer $\frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2}$ en série entière et gérer ensuite la double somme. Soit $n \geq 1$. Pour $|z| < 2\pi$ $(\leq 2n\pi)$, on a $\left|\frac{z}{2\pi n}\right| < 1$, donc :

$$\frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2} = \frac{z^2}{4\pi^2n^2} \times \frac{1}{1+\frac{z^2}{4\pi^2n^2}} = \frac{z^2}{4\pi^2n^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2(k+1)}}{(2\pi n)^{2(k+1)}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$$

On va donc s'intéresser à la série double $\sum u_{n,k}$ où pour $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $u_{n,k} = \frac{(-1)^{k-1} z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$. Alors pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|z|^{2k}}{(2\pi n)^{2k}} \underset{\left(\left|\frac{z}{2\pi n}\right|^2 < 1\right)}{=} \frac{|z|^2}{4\pi^2n^2} \times \frac{1}{1-\frac{|z|^2}{4\pi^2n^2}} = \frac{|z|^2}{4\pi^2n^2 - |z|^2}$$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_{n,k}| < +\infty$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^2}{4\pi^2n^2 - |z|^2} < +\infty$.

Ainsi d'après le théorème de Fubini-Tonelli, $(u_{n,k})_{n,k\geq 1}$ est sommable donc d'après le théorème de Fubini, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < 2\pi$, on a :

$$f(z) = 1 - \frac{1}{2z} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}} = 1 - \frac{1}{2z} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2z} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}\right) z^{2k}.$$

Or f se prolonge par continuité en 0 $\left(\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{\frac{e^z-1}{z-0}}\right) = 1\right)$ et la formule reste valide pour $z=0$.

Ainsi f est développable en série entière en 0 avec pour tout $|z| < 2\pi$, on a $f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) z^{2k}$.

(f n'est pas définie en $2i\pi$ donc on ne peut pas converger sur plus que $|z| < 2\pi$).

Or les nombres de Bernoulli $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ peuvent être définis par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ au voisinage de 0. Ainsi par unicité du DSE, on obtient $\frac{b_{2k}}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k) \times 2}{(2\pi)^{2k}}$ ie $\boxed{\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}}$ 2

(Bonus) D'après ce qu'il précède, on déduit $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$ et pour $n \geq 1$, $b_{2n+1} = 0$.

De plus, on peut effectuer le produit de Cauchy de f et exp, dont les sommes convergent absolument sur leur disque de convergence, et on obtient alors :

$$z = f(z)(e^z - 1) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!}\right) z^n$$

donc pour $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k \times n!}{k!(n-k)!} = 0$, donc $b_{n-1} = -\frac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} b_k$.

Ainsi $b_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $b_n \overset{(*)}{=} -\frac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$, donc par récurrence immédiate, $\forall k \in \mathbb{N}$, $b_k \in \mathbb{Q}$.

De plus, la relation de récurrence nous permet de calculer les premiers termes : $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_4 = -\frac{1}{30}$, $b_6 = \frac{1}{42}$, d'où

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

<u>Remarques</u> : * On peut définir les nombres de Bernoulli de manières différentes, par exemple de la façon suivante $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^p =: \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} \frac{b_k}{p+1} n^{p+1-k}$ ou encore comme étant la valeur en 0 des polynômes de Bernoulli définis par

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, B_n' = n B_{n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0 \end{cases}$$

. Pour montrer que toutes ces définitions sont équivalentes, il faut montrer qu'à chaque fois les $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation de récurrence (*) (mais ça demande (beaucoup) de calculs).

Les nombres de Bernoulli apparaissent dans beaucoup de domaines des maths, on les retrouve par exemple dans la formule d'Euler-Maclaurin (cf dev correspondant !)

* On ne connait pas beaucoup d'infos sur les $\zeta(2k+1)$: Mais Apéry a montré en 1978 que $\zeta(3)$ est irrationnel, et Rivoal a montré en 2001 qu'il y avait une infinité de k tels que $\zeta(2k+1)$ soit irrationnel.

* On peut déduire de notre théorème un équivalent des $|b_{2k}|$. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est normalement (donc uniformément) convergente sur $[2; +\infty[$, donc comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 0$ pour $n \geq 2$ (et 1 pour $n = 1$), on obtient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$, et ainsi $|b_{2k}| = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) \sim \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sim 4\sqrt{\pi k}\left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k}$ (Stirling)

* La fonction $\zeta : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ est définie sur $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s) > 1\}$, mais

elle peut se prolonger à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ (c'est pas évident ; fait dans le ZQ mais se utilise des outils déjà durs en eux-mêmes comme la formule sommatoire de Poisson, ou le fait que $\frac{1}{\Gamma}$ est entière sur $\mathbb{C}$).

* A l'époque, Euler avait montré la formule en utilisant l'expression de $\frac{\sin(x)}{x}$ en tant que produit infini :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin(x)}{x} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$ (quel crack)