Prolongement de la fonction Γ

↳ Réfs : OA p82-83 et ZQ p312-313.

Théorème : la fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est holomorphe sur $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0\}$. De plus, elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui admet des pôles simples en les $-n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Preuve du théorème : Montrons tout d'abord que Γ est holomorphe sur Ω_0.
Nous allons montrer à la fois que Γ est bien définie et est holomorphe en utilisant le théorème d'holomorphie sous l'intégrale.
Nous allons l'appliquer à la fonction $f : (z,t) \mapsto e^{-t} t^{z-1}$:

* Pour tout $t > 0$, la fonction $f(\cdot, t)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (car l'exp. l'est) donc en particulier sur Ω_0.

↳ par C^0 de $z \mapsto Re(z)$ sur K.

* Soit K un compact de Ω_0, il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a \leq b$ et $Re(z) \in [a,b]$ pour tout $z \in K$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $z \in K$, on a $|f(t,z)| = |t^{z-1} e^{-t}| = |e^{(z-1)\log(t)} e^{-t}| = t^{Re(z-1)} e^{-t}$

$$\leq \begin{cases} t^{a-1} & \text{si } t \in]0,1] \\ t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}.$$

Ainsi on peut borner $|f(\cdot, z)|$ indépendamment de z par la fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto t^{a-1} \mathbb{1}_{]0,1]}(t) + t^{b-1} e^{-t} \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(t)$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $t^{b-1} e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et puisque $a > 0$, $a - 1 > -1$, donc t^{a-1} est intégrable en 0 ↳ intégrale de Riemann).
Ainsi par le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, Γ est holomorphe sur Ω_0.

Montrons maintenant que Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pôles simples en les $-n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Pour cela nous allons découper Γ en deux et traiter les deux termes obtenus. Soit $z \in \Omega_0$, on écrit :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Au vu des majorations précédentes, le second terme ne va pas poser de problème, on montrera facilement qu'il est holomorphe sur tout $\mathbb{C}$, il

va donc falloir se concentrer sur le premier terme.
Nous allons pour cela utiliser le DSE de l'exponentielle. On a en effet

$e^{-t}t^{z-1} \underset{\text{pour } t\text{ donné}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$. Nous allons intervertir somme et intégrale en utilisant Fubini (à la mesure de Lebesgue ⊗ la mesure de comptage)

On veut montrer $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| dt < +\infty$.

Soit $t \in]0,1]$, alors puisque $|t^z| = t^{Re(z)}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| = t^{Re(z)-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t t^{Re(z)-1}.$$

Or puisque $Re(z)-1 > -1$, $t \mapsto e^t t^{Re(z)-1}$ est intégrable sur $]0,1]$. Donc d'après le théorème de Fubini-Tonelli, notre fonction est intégrable pour la mesure produit et donc d'après le théorème de Fubini, on peut intervertir somme et intégrale, d'où :

$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

Ainsi pour tout $z \in \Omega_0$, $\boxed{\Gamma(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}}_{=:g(z)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt}_{=:h(z)}}$.

Etudions maintenant les deux termes :

* Nous allons montrer que g est méromorphe, en utilisant un théorème de convergence de série de fonctions méromorphes (cf rappel à la fin) :

▶ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : z \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour seul pôle simple l'entier $-n$.

▶ Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Alors il existe $N_K \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \overline{D(0,N_K)}$. Alors pour $n > N_K$, g_n n'a pas de pôle dans K. De plus pour tout $z \in K$, on a $|z+n| \geq n - |z| \geq n - N_K$ ($n = |n+z-z| \leq |n+z| + |z|$)

Ainsi $|g_n(z)| \leq \frac{1}{n!(n-N_K)}$, donc la série $\sum_{n>N_K} g_n$ est normalement (donc uniformément) convergente sur K.

Ainsi, g est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et ses pôles (simples) sont les entiers négatifs.

* Pour le second terme, c'est plus simple, il s'agit de nouveau du théorème d'holomorphie sous l'intégrale pour la même fonction $f : (z,t) \mapsto e^{-t}t^{z-1}$:

▶ pour tout $t \geq 1$, $f(\cdot,t)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$

▶ Soit K un compact de $\mathbb{C}$, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall z \in K$, $\mathrm{Re}(z) \in [a,b]$. Alors $\forall t \in [1,+\infty[$, $z \in K$, $|f(t,z)| = t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-t}$
$\leq t^{b-1} e^{-t}$

Alors $|f(\cdot,z)|$ est bornée indépendamment de z par la fonction $t \mapsto t^{b-1}e^{-t}$ intégrable sur $[1,+\infty[$.
Donc d'après le théorème d'holomorphie sur l'intégrale, h est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Ainsi la fonction $g+h$ établit un prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C}$, dont les pôles (simples) sont les entiers négatifs.
Enfin, le théorème de prolongement analytique implique que, puisque $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$ est connexe, cette fonction est l'unique prolongement analytique de Γ sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$.

Avant les remarques, un rappel sur le théorème utilisé concernant les séries de fonctions holomorphes :

Théorème : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur Ω. Si, pour tout compact K de Ω :
* $\exists N_K \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_K$, f_n n'a pas de pôles de K.
* $\sum_{n \geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K.

Alors la série est méromorphe sur Ω (et on peut dériver terme à terme).
De plus si P_n est l'ensemble des pôles de f_n et P l'ensemble des pôles de f, on a $P \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$, et si les P_n sont 2 à 2 disjoints, on a $P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$.

Remarques : * On peut montrer le théorème autrement, en prolongeant de proche en proche grâce à la formule $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (donc $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$).
On peut aussi le montrer en utilisant la formule de Gauss puis la formule de Weierstrass (même si ça devient très sophistiqué) : on montre Gauss : $\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$, en montrant que $\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} I_n$ où $I_n = \int_0^n t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$, puis en calculant I_n par IPP, on exprime ça différemment pour aboutir à la formule de Weierstrass :
$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$, et alors on utilise des théorèmes sur les produits infinis pour montrer

que $\frac{1}{\Gamma}$ est entière et a ses zéros en les $-n$. Cette méthode est certes sophistiqué mais a des applications, par exemple, savoir que $\frac{1}{\Gamma}$ est entière peut être utilisé pour prolonger ζ en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ (voir ZQ) (c'est dur).

* Autre formule importante à connaître sur la fonction Γ : la formule des compléments !

↳ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \ \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

(calcul d'intégrales avec théorème des résidus)

(on peut aussi l'obtenir grâce à la formule de Weierstrass et à l'égalité $\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$)

d'ailleurs pour le théorème des résidus :
on peut obtenir le résidu en $-n$ de Γ grâce à la première méthode mentionnée en remarque : si $\mathrm{Re}(z) > -(n+1)$, et $z \notin \{0, -1, \dots, -n\}$,

on a $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n) \dots (z+1) z}$, donc $(z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n-1) \dots (z+1) z} \xrightarrow[z \to -n]{} \frac{\Gamma(1)}{(-1) \dots (-n+1)(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}$

Donc $\boxed{\mathrm{Res}_{-n}(\Gamma) = \frac{(-1)^n}{n!}}$