Critère de Kalmann

↳ Ref : Control and nonlinearity, Coron p6-11.

Cadre : On va s'intéresser à des problèmes de contrôlabilité. Késako ? Dans une équation différentielle de la forme $\dot{x} = f(t,x)$, on va vouloir rajouter une fonction u de contrôle (et alors l'équation devient $\dot{x} = f(t,x,u)$) de sorte à pouvoir, comme son nom l'indique, contrôler le système, afin d'atteindre n'importe quel état final, à partir de n'importe quel état initial en un temps fixé. Écrivons cela de manière rigoureuse avec des maths dans le cas particulier des équations linéaires.

Soient $T_0 < T_1$ deux réels, m et n deux entiers non nuls, $A : [T_0, T_1] \to M_n(\mathbb{R})$ et $B : [T_0, T_1] \to M_{n,m}(\mathbb{R})$ deux fonctions continues

Définition : On dit que le système $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ (bien défini car équation linéaire à coefficients continus !) est contrôlable si pour tout couple de vecteurs $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe une fonction $u \in C^0([T_0,T_1], \mathbb{R}^m)$ telle que la solution du problème de Cauchy

$$(*) \begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(T_0) = x_0 \end{cases} \text{ vérifie } x(T_1) = x_1.$$

On a tout d'abord un premier critère, sympa pour déboucher sur d'autres résultats mais peu utilisable en pratique parce que la résolvante peut être compliquée à calculer, puis le théorème "pratique".

Proposition : On note R la résolvante du système associé au problème $(*)$. On définit matrice de Gram du système par $\mathcal{E} := \int_{T_0}^{T_1} R(T_1,z)B(z)\,{}^tB(z)\,{}^tR(T_1,z)\,dz$.
Alors le système est contrôlable si et seulement si la matrice $\mathcal{E}$ est inversible.

Théorème : (Critère de Kalman) On suppose A et B constantes.
Alors le système $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est contrôlable si et seulement si $E := \mathrm{Vect}(A^i Bu,\ u \in \mathbb{R}^m,\ i \in [\![0, n-1]\!]) = \mathbb{R}^n$.
Cela revient à dire que le rang de la matrice $K = [A^0B \mid A^1B \mid \dots \mid A^{n-1}B]$ (dans $M_{n,n\times m}(\mathbb{R})$), appelée matrice de Kalman, est de rang n.

Preuve de la proposition : Avant tout, on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a ${}^t x \mathcal{E} x = \int_{T_0}^{T_1} \| {}^tB(\tau)\, {}^tR(T_1, \tau) x \|^2 d\tau \geq 0$, ainsi $\mathcal{E}$ est une matrice symétrique et positive.

"$\Leftarrow$" Supposons $\mathcal{E}$ inversible. Soit $(x_0, x_1) \in (\mathbb{R}^n)^2$. On définit pour tout $\tau \in]T_0, T_1[$, $\tilde{u}(\tau) = {}^tB(\tau)\, {}^tR(T_1, \tau)\, \mathcal{E}^{-1}(x^1 - R(T_1, T_0) x_0)$.

Alors en notant $\tilde{x}$ l'unique solution du système $\begin{cases} x' = Ax + B\tilde{u} \\ x(T_0) = x_0 \end{cases}$,

on a d'après la formule de Duhamel :

$$\tilde{x}(T_1) = R(T_1, T_0) x_0 + \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, \tau) B(\tau) \underbrace{\tilde{u}(\tau)}_{= {}^tB(\tau)\, {}^tR(T_1, \tau) \mathcal{E}^{-1}(x^1 - R(T_1, T_0) x_0)} d\tau$$

$\mathcal{E} =$

$$= R(T_1, T_0) x_0 + \mathcal{E}\mathcal{E}^{-1}(x_1 - R(T_1, T_0) x_0) = x_1.$$

Ainsi le système est contrôlable (et on a obtenu une expression explicite du contrôle

"$\Rightarrow$" Par contraposée, supposons que $\mathcal{E}$ ne soit pas inversible. Ainsi, il existe $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{E} y = 0$. Nous allons montrer que le système n'est pas contrôlable en montrant que l'on ne peut jamais atteindre y.

En particulier, $0 = {}^t y \mathcal{E} y = \int_{T_0}^{T_1} \| {}^tB(\tau)\, {}^tR(T_1, \tau) y \|^2 d\tau$. Ainsi, on en déduit que pour presque tout $\tau \in [T_0, T_1]$, (en fait tout τ car R continue) (*)

${}^tB(\tau)\, {}^tR(T_1, \tau) y = 0$ et donc ${}^t y R(T_1, \tau) B(\tau) = 0$. On se fixe $x_0 = 0$. Soit $u \in C^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^m)$, et x la solution de $\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ x(T_0) = 0 \end{cases}$

Ainsi toujours par la formule de Duhamel, x vérifie

$$x(T_1) = \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau, \text{ donc } {}^t y x(T_1) = \int_{T_0}^{T_1} \underbrace{{}^t y R(T_1, \tau) B(\tau)}_{= 0 \text{ pp}} u(\tau) d\tau = 0$$

Donc si on choisit x_1 tel que ${}^t y x_1 \neq 0$ (par exemple $x_1 = y$), on ne pourra pas atteindre x_1, le système n'est donc pas contrôlable.

Preuve du théorème : Nous allons évidemment nous servir de la proposition précédente. Dans notre cas, A étant constante, la résolvante est donnée par : $R(t_1, t_2) = e^{(t_1 - t_2)A}$ pour $t_1, t_2 \in [T_0, T_1]$. Alors la matrice de Gram est donnée par $\mathcal{E} = \int_{T_0}^{T_1} e^{(T_1 - \tau)A} B\, {}^tB\, e^{(T_1 - \tau)\, {}^tA} d\tau$.

"$\Leftarrow$" Par contraposée, supposons que le système ne soit pas contrôlable, alors d'après la proposition, $\mathcal{E}$ n'est pas inversible. Ainsi il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{E} y = 0$. Comme précédemment (*), on en déduit que $\forall t \in [T_0, T_1]$, ${}^t y R(T_1, t) B(t) = {}^t y e^{(T_1 - t)A} B = 0$.

(ici on peut directement mettre un "pour tout", R est directement C^0 vu son expression)

Cela équivaut à dire que la fonction $f : [T_0, T_1] \to \mathbb{R}^m$, $t \mapsto {}^t y\, e^{(T_1-t)A} B$ est identiquement nulle.

Or f est de classe C^∞ sur $[T_0, T_1]$ et donc $\forall i \in \mathbb{N}$, $f^{(i)}(T_1) = (-1)^i\, {}^t y A^i B = 0$. En particulier, $\forall v \in \mathbb{R}^m$, $\forall i\, [\![0, n-1]\!]$, ${}^t y A^i B v = 0$, donc $y \in E^\perp \setminus \{0\}$, donc $E \neq \mathbb{R}^n$.

"$\Rightarrow$" De nouveau, nous allons raisonner par contraposée. Supposons $E \neq \mathbb{R}^n$, alors il existe $y \in E^\perp \setminus \{0\}$, ie $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\forall v \in \mathbb{R}^m$, ${}^t y A^i B v = 0$. Donc $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, ${}^t y A^i B = 0$.

Or d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\forall i \in \mathbb{N}$, $A^i \in \mathrm{Vect}(A^j, j \in [\![0, n-1]\!])$ (en effet, si on effectue la division euclidienne de X^i par χ_A (pour $i \geq n$, sinon le résultat est évident) $X^i = Q\chi_A + R$ avec $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(R) < n$, donc on a : $A^i = Q(A)\chi_A(A) + R(A) = R(A)$)

Donc $\forall i \in \mathbb{N}$, ${}^t y A^i B = 0$. Ainsi en reprenant les notations précédentes $\forall i \in \mathbb{N}$, $f^{(i)}(T_1) = 0$. Or f est analytique sur $[T_0, T_1]$ donc f est identiquement nulle sur $[T_0, T_1]$, et donc ${}^t y \mathcal{E} y = 0$. Donc $\mathcal{E}$ est symétrique positive mais pas définie : elle n'est donc pas inversible et le système n'est pas contrôlable.

Avant les remarques, quelques rappels sur la résolvante :

On appelle résolvante du système $x' = A(t)x$ l'application $R : [T_0, T_1]^2 \to M_n(\mathbb{R})$, $(t_1, t_2) \mapsto R(t_1, t_2)$ telle que $\forall t_2 \in [T_0, T_1]$, $R(\cdot, t_2)$ soit la solution de $\begin{cases} H'(t) = A(t)H(t) \\ H(t_2) = I_n \end{cases}$.

Alors $R \in \mathcal{E}^0([T_0, T_1]^2, M_n(\mathbb{R}))$ (mais la 2e continuité a un lien avec la C^0 du flot dans le cas général donc on va s'en passer), et :

* $R(t_1, t_1) = I_n$
* $R(t_1, t_2)R(t_2, t_3) = R(t_1, t_3)$
* la solution de $\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ est donnée par $x(t) = R(t, t_0)x_0$.
* la solution de $\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ est donnée par $x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{T_0}^{t} R(t, \tau) b(\tau)d\tau$ (formule de Duhamel) = variation de la constante

Dans le cas des systèmes homogènes, $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$

Remarques : * Quelques exemples (en passant les détails) :

$\begin{cases} x_1' = u \\ x_2' = x_1 + tu \end{cases}$ $\triangleright$ $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $R(t, s) = e^{A(t-s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t-s & 1 \end{pmatrix}$,

pour $T_0 = 0$ et $T_1 = T > 0$, $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} T & T^2 \\ T^2 & T^3 \end{pmatrix}$, $\det(\mathcal{E}) = 0$,

le système n'est pas contrôlable

• $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = u \end{cases}$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R(t,s) = e^{A(t-s)} = \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
toujours pour $T_0 = 0$, $T_1 = T > 0$, $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} T^3/3 & T^2/2 \\ T^2/2 & T \end{pmatrix}$, $\det(\mathcal{E}) \neq 0$
donc le système est contrôlable
$\hookrightarrow$ avec Kalman : $A^0 B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^1 B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ le système est contrôlable
(et les calculs sont simples !).

* le critère de Kalman est indépendant de T_0 et T_1, le système est contrôlable sur $[T_0, T_1]$ ssi il l'est sur $[T_0', T_1']$.

* le calcul de la matrice de Gram peut être fastidieux, voire impossible (à cause de la résolvante puis de l'intégration), on cherche donc d'autres critères plus simples comme Kalman. Cela se généralise si A et B ne sont plus constants (mais les hypothèses restent fortes et on n'a plus équivalence) : Soient $A \in C^\infty([T_0, T_1], M_n(\mathbb{R}))$ et $B \in C^\infty([T_0, T_1], M_{n,m}(\mathbb{R}))$, on définit la suite de fonct° B_i par $\begin{cases} B_0 = B \\ B_{i+1} = B_i' - AB_i \end{cases}$
alors s'il existe $\bar{t} \in [T_0, T_1]$ tq $\mathrm{Vect}\{B_i(\bar{t})v, i \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{R}^m\} = \mathbb{R}^n$,
alors le système $x' = A(t)x + B(t)u$ est contrôlable
(pour le prouver, on utilise globalement le même raisonnement que dans la preuve du théorème). On peut obtenir une équivalence si A et B sont analytiques. Bon en revanche ça me semble beaucoup moins utilisable...

* On a choisi ici de prendre u dans $\mathcal{C}^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^m)$, on pourrait étendre en prenant des contrôles $L^1([T_0, T_1], \mathbb{R}^m)$ ou $L^\infty([T_0, T_1], \mathbb{R}^m)$, mais il faut alors s'embêter à justifier la bonne définition du système via des théorèmes du point fixe.

* le contrôle construit dans la preuve de la proposition est en fait un contrôle de norme L^2 minimale ! (et ça peut être intéressant dans certains contextes)

* On peut voir le problème de contrôlabilité comme un problème de surjectivité (et ça permet de mieux généraliser le problème) : on définit
$$F_{T_0,T_1} : C^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, z) B(z) u(z)\, dz$$
et alors
le syst est contrôlable sur $[T_0, T_1] \Leftrightarrow F_{T_0,T_1}$ est surjective
(on peut faire le lien avec K, $\mathrm{Im}(F_{T_0,T_1}) = \mathrm{Im} K$ et $\mathrm{Im}(K)^\perp = \mathrm{Ker}(G)$) (c'est ce qu'on fait dans la preuve du théorème).

* Ici, on s'intéresse à la quest° "$\forall T_0 < T_1$, $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, $\exists ?\, u \in C^0$ tq $x(T_1) = x_1$" mais on peut se poser d'autres questions : la contrôlabilité en temps long "$\exists T_0, \forall T > T_0$ ...", la contrôlabilité locale "on se fixe $x_e \in \mathbb{R}^n$, $\forall T > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall (x_0, x_f) \in B(x_e, \delta)$ ...", la contrôlabilité approchée, où l'on demande seulement $\|x(T) - x_f\| < \varepsilon$ etc etc.