Formule de Stirling par les intégrales de Wallis

↳ Réf : Gourdon, Analyse p 130 & p219-220.

Lemme : (Formule de Wallis) $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\left(\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1}\right)^2 = \pi$.

Théorème : (Formule de Stirling) $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Preuve du lemme : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la n-ième intégrale de Wallis par $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx$. Calculons I_n en fonction de n.

Soit $n \geq 2$. Par intégration par parties (toutes les fonctions considérées étant bien de classe C^1), on obtient :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(x)\sin(x)\,dx = \underbrace{\left[-\sin^{n-1}(x)\cos(x)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}(x)(1-\sin^2(x))\,dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

D'où $\left[I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}\right]$. Nous allons obtenir 2 formules en fonction de la parité de n.

Soit $p \geq 1$,

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2}$$

$$= \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} \times I_0 \quad \left(I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx\right)$$

$$= \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} \times \frac{\pi}{2}$$

Soit $p \geq 2$,

$$I_{2p-1} = \frac{2p-2}{2p-1} I_{2p-3}$$

$$= \frac{(2p-2)(2p-4)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1} \times I_1 \quad \left(I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,dx = \left(-\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{(2p-2)(2p-4)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1}$$

D'autre part, pour tout $p \geq 2$ et tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $0 \leq \sin^{2p}(x) \leq \sin^{2p-1}(x) \leq \sin^{2p-2}(x)$; donc en intégrant, on obtient pour tout $p \geq 2$, $0 < I_{2p} \leq I_{2p-1} \leq I_{2p-2}$, donc

$$1 \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p}} \leq \frac{I_{2p-2}}{I_{2p}} = \frac{2p}{2p-1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1.$$ Donc par encadrement, $\lim_{p\to+\infty} \frac{I_{2p-1}}{I_{2p}} = 1$.

Or $$\frac{I_{2p-1}}{I_{2p}} = \frac{(2p-2)(2p-4)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1} \times \frac{2}{\pi} \times \frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1} \times \frac{2p}{2p} = \frac{1}{\pi}\times\frac{1}{p}\times\left(\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)\dots 1}\right)^2$$

D'où le résultat.

Preuve du théorème : On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$, et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $v_n = \log\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ (bien définie car $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$).

Alors $v_n = \log\left(\underbrace{\dfrac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{n^n\sqrt{n}}}_{(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}\ \underbrace{\dfrac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}}}_{e^{-1}}\ \underbrace{\dfrac{n!}{(n+1)!}}_{\frac{1}{n+1}}\right) = \log\left(e^{-1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right)$

$$= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = -1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= -1+1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi, puisque $\sum_n \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann), par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_n |v_n|$ est convergente, donc $\sum_n v_n$ converge ($\mathbb{R}$ est complet). Or $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} v_k = \log(u_{n+1})-\log(u_1)$, ainsi la suite $(\log(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\in\mathbb{R}$. Ainsi par continuité de l'exponentielle, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^λ. Ainsi en notant $k=e^{-\lambda}$, on obtient $\left[n! \sim k\, n^n e^{-n}\sqrt{n} = k\, n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\right]$.

Cherchons k grâce au lemme précédent.

On a vu $\lim_{p\to+\infty}\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}\right)^2 = \pi$, or

$$\frac{1}{p}\left(\frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}\right)^2 = \frac{1}{p}\left(\frac{(2p)^2(2p-2)^2\cdots 2^2}{2p(2p-1)\cdots 1}\right)^2 = \frac{1}{p}\left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right)^2$$

$$\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\cancel{2^{4p}}}{\cancel{p}}\times\frac{k^4\,\cancel{p^{4p+2}}\,\cancel{e^{-4p}}}{k^2\,\cancel{(2p)^{4p+1}}\,\cancel{e^{-4p}}} = \frac{k^2}{2}$$

Donc par unicité de la limite, on obtient $k=\sqrt{2\pi}$, d'où $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

Remarques : * La formule de Wallis permet d'en déduire $I_{2p}\sim I_{2p+1}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$

* On peut obtenir une formule de Stirling "généralisée" grâce à la fonction Γ : $\Gamma(x+1)\sim\sqrt{2\pi}\,x^{x+1/2}e^{-x}$, que l'on peut par exemple obtenir grâce à la méthode de Laplace.