Convergence faible et optimisation dans un Hilbert

↳ Refs : Gourdon, Analyse p 431-432 + Ciarlet p 176-177 + polys de Karine et Thomas

Rappel : Soit H un espace de Hilbert et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x\in H$ si $\forall y\in H$, $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$.
On note alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$. (Voir après le dev pour d'autres rappels à connaître sur la convergence faible)

Théorème : Soit H un espace de Hilbert séparable. Toute suite bornée de H admet une sous suite qui converge faiblement.

Proposition : Soit H un espace de Hilbert séparable. Soit $J : H \to \mathbb{R}$ une application différentiable, convexe et coercive ($J(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$) et C une partie non vide, convexe, fermée de H. Alors il existe $x^*\in C$ tel que $J(x^*) = \inf\{J(x), x\in C\}$.

Preuve du théorème : Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans H, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H. Soit M tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|x_n\|\le M$.
La suite $(\langle x_n, h_0\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle, bornée d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ_0 telle que $(\langle x_{\varphi_0(n)}, h_0\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
Par récurrence, soit $i\in\mathbb{N}$ tel que l'on ait construit $\varphi_0, \dots, \varphi_i$ des extractrices tel que pour tout $p\in[\![0,i]\!]$, $(\langle x_{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\dots\circ\varphi_i(n)}, h_p\rangle)$ converge.
Alors la suite $(\langle x_{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\dots\circ\varphi_i(n)}, h_{i+1}\rangle)$ est bornée d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc de nouveau par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ_{i+1} telle que $(\langle x_{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\dots\circ\varphi_{i+1}(n)}, h_{i+1}\rangle)$ converge.
(et pour tout $p\in[\![0,i]\!]$, $(\langle x_{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\dots\circ\varphi_{i+1}(n)}, h_p\rangle)_n$ converge toujours en tant que sous suite d'une suite convergente).
On définit alors $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \varphi_0\circ\varphi_1\circ\dots\circ\varphi_n(n)$ (procédé d'extraction diagonale).

Alors φ est une extractrice telle que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $(\langle x_{\varphi(n)}, h_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (car $(\langle x_{\varphi(n)}, h_k\rangle)_{n\ge k}$ est une sous suite de $(\langle x_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_k(n)}, h_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$)
Montrons maintenant que pour tout $y\in H$, $(\langle x_{\varphi(n)}, y\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Soit $y\in H$. Puisque $\mathbb{R}$ est complet, il suffit de montrer que la suite $(\langle x_{\varphi(n)}, y\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon>0$. Par densité, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $\|y-h_k\|\le\frac{\varepsilon}{3M}$. Puisque la suite $(\langle x_{\varphi(n)}, h_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est de Cauchy, donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n,m\ge N$, $|\langle x_{\varphi(n)}-x_{\varphi(m)}, h_k\rangle|\le\frac{\varepsilon}{3}$.
Alors pour $n,m\ge N$, on a par inégalité triangulaire puis Cauchy Schwarz
$|\langle x_{\varphi(n)}-x_{\varphi(m)}, y\rangle| \le |\langle x_{\varphi(n)}-x_{\varphi(m)}, h_k\rangle| + |\langle x_{\varphi(n)}-x_{\varphi(m)}, y-h_k\rangle| \le \frac{\varepsilon}{3} + 2M\times\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon$

Ainsi la suite $(\langle x_{\varphi(n)}, y\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on note $l(y)$ sa limite.
Alors l'application $l : H \to \mathbb{R}$ est bien définie et linéaire. Elle est de plus continue grâce à Cauchy-Schwarz car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $|\langle x_{\varphi(n)}, y\rangle| \leq \|x_n\|\|y\| \leq M\|y\|$, donc en passant à la limite, $|l(y)| \leq M\|y\|$). Ainsi, d'après le théorème de Riesz, il existe $x\in H$ tel que pour tout $y\in H$, $l(y) = \langle x, y\rangle$, c'est à dire que pour tout $y \in H$, $\langle x, y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x_{\varphi(n)}, y\rangle$, donc $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

"même idée que dans $\mathbb{R}$, par coercivité, on se ramène à un compact et on utilise la compacité"

Preuve de la proposition : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante, telle que $J(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf\{J(x), x\in C\}$ (bien défini, et fini car J est coercive). Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : en effet $(J(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ car convergente. Soit M tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|J(x_n)| \leq M$.
Puisque J est coercive, il existe $R>0$ tel que pour tout $\|x\|>R$, $J(x) > M$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq R$.
D'après le théorème précédent, il existe donc φ une extractrice et $x^* \in H$ tels que $x_{\varphi(n)} \longrightarrow x^*$. Montrons que $x^*\in C$. On note $P_C(x^*)$ son projeté sur C donné par le théorème de projection sur un convexe fermé. Par ce même théorème, on a (caractérisation par les angles obtus) : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\langle P_C(x^*)-x^*, P_C(x^*) - x_{\varphi(n)}\rangle \leq 0$ (car $x_{\varphi(n)}\in C$), donc en passant à la limite ($n\to+\infty$), on obtient $\|P_C(x^*) - x^*\|^2 \leq 0$, donc $x^* = P_C(x^*) \in C$. (*)
Montrons maintenant $J(x^*) \leq \inf\{J(x), x\in C\}$.
Puisque J est convexe et différentiable, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$J(x_{\varphi(n)}) \geq J(x^*) + \langle \nabla J(x^*), x_{\varphi(n)} - x^*\rangle$.
Ainsi en passant à la limite ($n\to+\infty$), on obtient
$\inf\{J(x), x\in C\} \geq J(x^*)$, et donc $J(x^*) = \inf\{J(x), x\in C\}$.

Bonus : Le théorème est toujours vrai dans un Hilbert quelconque (même non séparable) et la proposition est donc également vraie dans un Hilbert quelconque.

Preuve : Si H n'est pas séparable, alors on considère $\tilde{H} = \overline{\mathrm{Vect}\{x_n, n\in\mathbb{N}\}}$ qui est un Hilbert (SEV de H, qui conserve le produit scalaire et qui est complet car fermé dans un complet) séparable. D'après le théorème que nous avons montré, il existe $x\in\tilde{H}$ et φ une extractrice tels que $\forall y\in\tilde{H}$, $\langle x_{\varphi(n)}, y\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle x, y\rangle$. Or $\tilde{H}$ est un SEV fermé, donc d'après le théorème du supplémentaire orthogonal, $H = \tilde{H} \oplus \tilde{H}^{\perp}$.

Soit $y \in H$, et $y = u + v$ sa décomposition selon $H = \overline{A} \oplus \overline{A}^{\perp}$. On a alors $\langle x_{\varphi(n)}, y\rangle = \langle x_{\varphi(n)}, u\rangle + \underbrace{\langle x_{\varphi(n)}, v\rangle}_{=0} = \langle x_{\varphi(n)}, u\rangle$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle x, u\rangle = \langle x, u+v\rangle = \langle x, y\rangle.$$

D'où le résultat.

Avant de passer aux remarques, quelques rappels sur la convergence faible :

* **unicité de la limite faible** (si $x_n \rightharpoonup x$ et $x_n \rightharpoonup x'$, alors pour tout $y \in H$, $\langle x - x', y\rangle = \langle x - x_n, y\rangle + \langle x_n - x', y\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, en particulier pour $y = x - x'$, $\|x - x'\|^2 = 0$ donc $x = x'$)

* $\left[x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \Rightarrow x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x\right]$ (Cauchy-Schwarz : $\langle x_n - x, y\rangle \leq \|x_n - x\|\|y\|$)

* $\left[x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x \Rightarrow \|x\| \leq \liminf \|x_n\|\right]$ (Cauchy-Schwarz : $\|x\|^2 = \lim \langle x, x_n\rangle$
$\leq \|x\| \liminf \|x_n\|$)

* $\left[x_n \rightharpoonup x \Rightarrow (x_n)_n \text{ bornée}\right]$ ($T_n : H \to \mathbb{R}$, $h \mapsto \langle x_n, h\rangle$, alors $\|T_n\| = \|x_n\|$ (CYS + évaluer en x_n) et on applique Banach Steinhauss à $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

* $\left[x_n \to x \Leftrightarrow x_n \rightharpoonup x \text{ et } \|x_n\| \to \|x\|\right]$ ($\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle$)

* $\left[(x_n \rightharpoonup x \text{ et } y_n \to y) \Rightarrow (\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle)\right]$ ($\|x_n\| \leq M$ (car CV faible), pour n assez grand, $|\langle x_n - x, y\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\|y_n - y\| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$, et alors

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle|$$
$$\leq \|x_n\|\|y_n - y\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Pour un contre exemple à $(x_n \rightharpoonup x \text{ et } y_n \rightharpoonup y) \not\Rightarrow (\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle)$, on peut considérer $x_n = y_n$ avec $\|x_n\| = 1$ et $x_n \rightharpoonup 0$)

* $\left[\text{Si } x_n \rightharpoonup x \text{ alors } x \in \overline{\mathrm{Conv}}(x_n, n\in\mathbb{N})\right]$ (on note $C := \overline{\mathrm{Conv}}(x_n, n\in\mathbb{N})$, et $P_C : H \to C$ la project° sur C, alors $\forall n$, $\langle P_C(x) - x, P_C(x) - x_n\rangle \leq 0$ (car $x_n \in C$) et en passant à la limite $(n \to +\infty)$ $\|P_C(x) - x\|^2 \leq 0$, donc $x = P_C(x) \in C$ (reprenné dans la proposition).

Exemples de convergence faible : $e^{int} \rightharpoonup 0$ dans $L^2(0,1)$ par Riemann Lebesgue, et + généralement si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H un Hilbert, $x_n \rightharpoonup 0$ ($\forall z$, $\|z\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle z, x_n\rangle|^2$ donc $\langle z, x_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$), donc autre ex la suite $(e_n = (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$, mais dans tous ces cas, $x_n \not\to 0$ car $\|x_n\| = 1$

Autres exemples : dans $L^2(\mathbb{R})$ $\tau_n f \rightharpoonup 0$ pour f à support $\subset [a, +\infty[$, dans $L^2(0,1)$, $\sqrt{n}\, 1_{\dots} \rightharpoonup 0$

Remarques : * En fait, J continue est suffisant pour la proposition (mais la réf de ça est interdite) : même chose jusqu'à (*) et ensuite : soit $\alpha > \inf\{J(x), x\in C\}$, et on définit $C_\alpha = J^{-1}(]-\infty, \alpha])$, non vide, convexe (car J convexe) fermé (car J continue), on définit alors P_α la projection sur C_α. Comme $J(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf\{J(x), x\in C\}$, il existe $N>0$, $\forall n\geq N$, $x_{\varphi(n)}\in C_\alpha$. Par la propriété des angles obtus : $\forall n\geq N$, $\langle P_\alpha(x^*)-x^*, P_\alpha(x^*)-x_{\varphi(n)}\rangle \leq 0$, à la limite pour $(n\to+\infty)$, on obtient $\|x^*-P_\alpha(x^*)\|^2\leq 0$, donc $x^* = P_\alpha(x^*) \in C_\alpha$, et ce pour tout $\alpha > \inf\{J(x), x\in C\}$, d'où $J(x^*)\leq \inf\{J(x), x\in C\}$ et on obtient l'égalité.

* On peut définir sur H la topologie faible comme la topologie la + fine qui rende les $\varphi_g : H \to \mathbb{R}$, $h \mapsto \langle h, g\rangle$ pour $g\in H$ continues, alors converger pour cette topologie équivaut à converger faiblement (donc F est fermé faible ssi toute limite faible de points de F reste dans F). Et on peut montrer que si H est séparable, la boule unité de H munie de la topologie faible est métrisable (en définissant la distance de par $d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}|\langle x-y, e_n\rangle|$ où $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne). Alors le théorème montre que cet espace vérifie Bolzano Weierstrass (en étant métrique), il est donc (faiblement) compact ! En revanche attention, H en entier muni de la topologie faible, si H est de dim infinie, n'est pas métrisable ! (les voisinages ne sont pas bornés)
$\hookrightarrow \bigcap_{i\in[1,n]} \varphi_{g_i}^{-1}((\langle x,g_i\rangle-\varepsilon, \langle x,g_i\rangle+\varepsilon))$
(ouverts de la topo faible : $\bigcup_{\varphi_g} \bigcap_{\text{finie}} \varphi_g^{-1}(\text{ouvert de } \mathbb{R})$)

* En fait le théorème correspond à une version faible du théorème de Banach-Alaoglu : sur E evn, on définit la topo faible $\sigma(E,E')$ comme la topologie la + fine rendant tous les $f\in E'$ continues, et la topo faible * $\sigma(E',E)$ sur E' comme la topologie la + fine rendant toutes les $\varphi_x : E' \to E$, $f\mapsto f(x)$ continues
($x_n \to x \Leftrightarrow \forall f\in E', f(x_n)\to f(x)$ et $f_n \xrightarrow{*} f \Leftrightarrow \forall x\in E, f_n(x)\to f(x)$)
Alors le thm de Banach Alaoglu nous dit que $B_{E'} = \{f\in E', \|f\|\leq 1\}$ est compact pour la topologie faible * $\sigma(E',E)$, ie que [pour toute suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E' bornée, il existe une extractrice φ et $T\in E'$ tq $\forall x\in E$, $\lim_{n\to+\infty} T_{\varphi(n)}(x) = T(x)$] (mais tout ça c'est archi dur donc bon...)
(enfin [·] est fait dans le Bernis & Bernis dans le cas E séparable et ça revient à ce qu'on a fait nous, mais dans le cas général...)

* Le fait que la boule unité d'un Hilbert est faiblement compacte est remarquable, parce qu'elle ne l'est pas pour la topologie de la norme dès que H est de dim infinie (thm de Riesz) !

Complément : Une application à la résolution d'une équation différentielle elliptique non linéaire

Quelques rappels sur les espaces de Sobolev :

On définit, pour $I =]a, b[$ intervalle de $\mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$,

$$W^{1,p}(I) = \{ u \in L^p \mid \exists \underbrace{g}_{=:u'} \in L^p, \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \int_I u\varphi' = \int -g\varphi \}$$

Alors $W^{1,p}(I)$ muni de la norme $\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_p + \|u'\|_p$ est un Banach.
Pour $p = 2$, on note $H^1 = W^{1,2}$, c'est un Hilbert pour le PS $\langle u, v \rangle = \int uv + u'v'$

→ $C_c^\infty(I)$ dense dans L^p (pour $1 \leq p < +\infty$) pour $\|\ \|_p$ mais pas dans $H^1(I)$ pour $\|\ \|_{1,2}$ () on définit alors $H_0^1(I)$ comme la fermeture dans $H^1(I)$ de $C_c^\infty(I)$

($u \in H^1(I)$, alors $u \in H_0^1(I) \Leftrightarrow u(a) = u(b) = 0$)

Inégalité de Poincaré : Pour $u \in H_0^1(I)$, on a $\|u\|_{H^1} \leq \text{cst} \times \|u'\|_2$.

→ Pour résoudre des équat° elliptiques linéaires, on peut utiliser Lax Milgram (Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue, coercive, alors pour $T \in H^*$, $\exists ! u \in H$, $\forall v \in H$, $a(u, v) = T(v)$. Si de ⊕, a est symétrique, alors u est tel que $J(u) = \inf\{J(v), v \in H\}$ où $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - T(v)$ ou même Riesz qui suffit parfois, pour obtenir l'existence de solut° faibles, puis on se débrouille pour avoir la régularité et finalement on obtient une solution classique ! Ici, on ne va pas pouvoir faire cela car on ne pourra pas obtenir de a bilinéaire)

On s'intéresse au problème suivant : pour $p \in \mathbb{N}^*$, et $f \in L^2(0,1)$, $\begin{cases} -u'' + |u|^p u = f \text{ sur }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

Une solution faible est une fonction $u \in H_0^1(0,1)$ telle que $\forall v \in H_0^1(0,1)$,

$$\left[\int_0^1 u'v' + |u|^p u v = \int_0^1 f v \right]$$

On va montrer qu'il existe une solution faible à notre problème.

On définit

$$J : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto \int_0^1 \frac{u'^2}{2} + \frac{|u|^{p+2}}{p+2} - fu$$

Alors J est différentiable de différentielle $dJ(u) \cdot v = \int_0^1 u'v' + |u|^p uv - fv$ (calcul pas simple du tout, surtout pour mtq $J(u+v) - J(u) - dJ(u) \cdot v = o(\|v\|_{H_0^1})$ *)
et J est convexe. Elle est de plus coercive : pour $u \in H_0^1(0,1)$,
on a $J(u) \geq \int_0^1 \frac{u'^2}{2} - fu \geq \int_0^1 \frac{u'^2}{2} - \|f\|_2 \|u\|_2$ par Cauchy-Schwarz

$$\geq \|u'\|_2^2 - \|f\|_2 \|u\|_{H^1} \geq c\|u\|_{H^1}^2 - \|f\|_2 \|u\|_{H^1} \text{ par Poincaré.}$$

* cf poly Thomas

Donc J vérifie les hypothèses de la proposition et $H_0^1(0,1)$ est un Hilbert, donc $\exists u \in H_0^1(0,1)$, $J(u) = \min_{v \in H_0^1(0,1)} J(v)$, alors $dJ(u) = 0$, ie $\forall v \in H_0^1(0,1)$, $\int_0^1 u'v' + |u|^p u v - f v = 0$, ie u est une solution faible du problème.

<u>Remarque</u> : Si f est continue, on peut alors montrer que la solution est en fait une solution classique.