Théorème de Riesz - Fischer

↳ Refs : Brézis p57-58 + Li p10-11

Théorème : (Riesz - Fischer) : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Alors pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $L^p(\mu)$ est un espace de Banach. De plus, toute suite qui converge dans $L^p(\mu)$ admet une sous suite qui converge simplement μ-presque partout.

Preuve du théorème : 1) Traitons tout d'abord le cas $p \in [1, +\infty[$.
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$.

(*) Trouvons un candidat pour la limite : Pour cela, nous allons exprimer la fonction f_n sous forme d'une série et montrer que cette série converge. Puisque $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe une sous suite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \geq 1$, $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$. (En effet, il existe n_1 tel que $\forall m, n \geq n_1$, $\|f_m - f_n\| \leq \frac{1}{2}$, on prend ensuite $n_2 > n_1$ tel que $\forall n, m \geq n_2$, $\|f_m - f_n\| \leq \frac{1}{2^n}$, etc) On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n := \sum_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$.

La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions positives, elle converge donc simplement vers la fonction $g := \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$, à valeurs dans $[0, +\infty]$. De plus, par inégalité triangulaire (inégalité de Minkowski), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_X g_n^p \, d\mu \leq 1$, et $(g_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite croissante de fonctions positives, qui converge simplement vers g^p. Le théorème de convergence monotone nous permet donc de conclure que $\int_X g^p \, d\mu \leq 1$, ie $g \in L^p$. Ainsi, il existe N de mesure nulle tel que $|g|$ est finie sur $X \setminus N$. Ainsi, pour tout $x \in X \setminus N$, la série $\sum_k (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ est absolument convergente dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) donc convergente, car $\mathbb{R}$ (resp $\mathbb{C}$) est complet, on note $l(x)$ sa limite.

On définit alors $f : x \mapsto \begin{cases} f_{n_1}(x) + l(x) & \text{si } x \in X \setminus N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Or, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_m}$, donc on en déduit que pour tout $x \in X \setminus N$, $\lim_{k \to +\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$. Ainsi nous avons trouvé une fonction f qui est limite simple μ-presque partout de $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Montrons que $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et que $\|f-f_n\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Soit $\varepsilon>0$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n,m\geq N$, $\|f_m-f_n\|_p\leq\varepsilon$. Soit $n\geq N$. Alors
$$\|f-f_n\|_p^p=\int_X|f-f_n|^p d\mu=\int_{X\setminus N}|f-f_n|^p d\mu=\int_{X\setminus N}\liminf_k |f_{n_k}-f_n|^p d\mu,$$
donc d'après le lemme de Fatou,
$$\|f-f_n\|_p^p\leq\liminf_k\int_{X\setminus N}|f_{n_k}-f_n|^p d\mu=\liminf_k \underbrace{\|f_{n_k}-f_n\|^p}_{\leq\varepsilon^p \text{ dès que } n_k\geq N}$$
$$\leq\varepsilon^p.$$
Ainsi $f-f_n\in\mathcal{L}^p(\mu)$, donc $f\in\mathcal{L}^p(\mu)$ ($f=f_n+(f-f_n)$ et $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel), et de plus, $\lim_{n\to+\infty}\|f-f_n\|_p=0$.
Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{L}^p(\mu)$ vers f, et on a vu que la sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeait simplement presque partout vers f.

2) Traitons maintenant le cas $p=+\infty$.
(Rappel : $\|f\|_\infty=\inf\{c>0 \mid \mu(\{x\in X, |f(x)|>c\})=0\}$
$=\inf\{c>0 \mid |f(x)|\leq c \text{ pp}\}$)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$.
Trouvons un candidat pour la limite : Cette fois, pas besoin d'invoquer une série, mais il faut faire attention en maniant les ensembles négligeables. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe N_k tel que pour tout $m,n\geq N_k$, $\|f_m-f_n\|_\infty\leq\frac{1}{k}$. Ainsi en notant, pour $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, $A^k_{n,m}=\{x\in X, |f_m(x)-f_n(x)|>\frac{1}{k}\}$, on en déduit que pour tout $m,n\geq N_k$, $\mu(A^k_{n,m})=0$. On définit $A^k:=\bigcup_{n,m\geq N_k}A^k_{n,m}$.
Alors A^k est négligeable comme union dénombrable d'ensembles négligeables. On note $A:=\bigcup_{k\geq1}A^k$. De nouveau, A est négligeable comme union dénombrable d'ensembles négligeables, et pour tout $x\in A^c=\bigcap_{k\geq1}\bigcap_{m,n\geq N_k}{A^k_{n,m}}^c$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ pour tout $m,n\geq N_k$, $|f_m(x)-f_n(x)|\leq\frac{1}{k}$. Ainsi la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, elle converge donc vers une limite que l'on va noter $f(x)$ (on définit $f(x):=0$ si $x\in A$). On a alors obtenu une fonction f qui est limite simple μ-pp de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrons que $f\in\mathcal{L}^\infty(\mu)$ et que $\|f-f_n\|_\infty\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En passant à la limite pour $(m \to +\infty)$ dans (*), on obtient pour tout $x \in A^c$, pour tout $n \geq N_k$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$, donc $\forall n \geq N_k$, $\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$.
Ainsi $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ (par exemple $f = f_{N_k} + (f - f_{N_k})$, f_{N_k} et $f - f_{N_k}$ sont dans $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ qui est un espace vectoriel) et de plus $\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ vers f, et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elle-même converge simplement presque partout vers f.

<u>Remarques</u> : * Toujours la même méthode pour montrer qu'un espace est complet : prendre une suite de Cauchy, trouver un candidat à la limite (souvent en utilisant la complétude de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), montrer que le candidat appartient à l'espace considéré et que la convergence a lieu pour la norme considérée.

* On peut aussi montrer le théorème en utilisant la caractérisation suivante des espaces complets : $(E, \|\cdot\|)$ est complet $\Leftrightarrow$ Toute série absolument CV est CV.
("$\Rightarrow$") si $\sum_k \|x_k\|$ CV, alors $\|S_p - S_q\| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\| \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} \|x_k\| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy donc CV
"$\Leftarrow$" $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, comme dans la preuve du théorème, il existe une sous suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}$, alors $\sum \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|$ est CV et donc $\sum_{k \geq 1} x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ aussi, donc $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ aussi, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence, elle CV)
Et globalement après on fait le même genre de choses qu'on a fait dans la preuve.

* On a pris un espace mesuré quelconque : en particulier c'est vrai pour $\mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage, donc pour tout $p \in [1, +\infty]$, $\ell^p(\mathbb{N})$ est également complet.