Théorème de Lévy et théorème central limite

↳ Zuily - Queffélec p533-541 et Bernis & Bernis p207-215 (surtout pour Lemme 2)

On se place dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de proba.

Rappel : Une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si pour tout $f \in C_b^0(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$.

Lemme 1 : Soit (X_n) une suite de VA réelles et X une VA réelle.
Alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall f \in C_0^0(\mathbb{R}),\ \mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$
où $C_0^0(\mathbb{R}) = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \mid f(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0\}$.

Théorème 1 : (Lévy) Soit (X_n) une suite de VAR et X une VAR. Alors
$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_X(t).$$

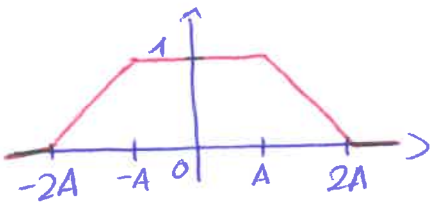
Lemme 2 : Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nbr complexes tq $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} z \in \mathbb{C}$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = e^z$

Théorème 2 : (central limite) Soit (X_n) une suite de VAR iid admettant un moment d'ordre 2. En notant $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$ (que l'on suppose $\neq 0$), et $\overline{X_n} = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k}_{=\frac{S_n}{n}}$, alors $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-\mu)}{\sqrt{\sigma}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Preuve du lemme 1 : "$\Rightarrow$" clair car $C_0^0(\mathbb{R}) \subset C_b^0(\mathbb{R})$

"$\Leftarrow$" Soit $\varepsilon>0$ et $A>0$ tel que $\mathbb{P}(|X|>A) \leq \varepsilon$ $(= \mathbb{P}_X(\{x \mid |x|>A\}))$

Posons $\varphi \in C_0^0$ valant 1 sur $[-A, A]$ et nulle en dehors de $[-2A, 2A]$:



Et donc $\displaystyle\int (1-\varphi)\,d\mathbb{P}_X \leq \int \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]}\,d\mathbb{P}_X(x)$
$\leq \mathbb{P}(|X|>A) \leq \varepsilon$

Soit $f \in C_b^0(\mathbb{R})$. On a alors :
$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f\,d\mathbb{P}_X = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi)\,d\mathbb{P}_{X_n}}_{A_n} + \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f\varphi\,d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f\varphi\,d\mathbb{P}_X\right)}_{B_n} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi)\,d\mathbb{P}_X}_{C_n}$$

Tout d'abord, $f\varphi \in C_0^0(\mathbb{R})$ donc par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = 0$.

Ensuite, $|A_n| \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} (1-\varphi)\,d\mathbb{P}_{X_n} = \|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi\,d\mathbb{P}_{X_n}\right)$, or $\varphi \in C_0^0(\mathbb{R})$,
donc $\limsup\limits_{n\to+\infty} |A_n| \leq \|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi\,d\mathbb{P}_X\right) \leq \|f\|_\infty\, \varepsilon$. Et on obtient directement $|C_n| \leq \|f\|_\infty\, \varepsilon$.

Ainsi $\limsup_{n\to+\infty} \left|\int_{\mathbb{R}} f\, d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f\, d\mathbb{P}_X\right| \leq 2\|f\|_\infty \varepsilon$.

Cela montre donc la convergence voulue puisque ε est quelconque.

Preuve du théorème 1 : "$\Rightarrow$" ok car $x \mapsto e^{itx}$ est continue bornée $\forall t \in \mathbb{R}$

"$\Leftarrow$" Soit $f \in \{\hat{\varphi} \mid \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})\}$, donc il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tq $f = \hat{g}$, et $f \in C_0^0(\mathbb{R})$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(\hat{g}(X_n)) = \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-itX_n} g(t)\,dt\right)$.

Or $\int_\Omega \int_{\mathbb{R}} |e^{-itX_n} g(t)|\,dt\,d\mathbb{P} = \int_\Omega \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |g(t)|\,dt}_{\|g\|_{\mathcal{L}^1} < +\infty}\,d\mathbb{P} = \|g\|_{\mathcal{L}^1} < +\infty$

D'après le théorème de Fubini-Tonelli, la fonction est intégrable, donc d'après Fubini (pour la mesure produit)

$\mathbb{E}(f(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathbb{E}(e^{-itX_n})\,dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)\,\varphi_{X_n}(-t)\,dt$

Or par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} \varphi_{X_n}(-t) = \varphi_X(-t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, et

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|g(t)\varphi_{X_n}(-t)| \leq |g(t)|$ fonction $\mathcal{L}^1$, donc par CV dominée,

$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\varphi_X(-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathbb{E}(e^{-itX})\,dt$.

Or $\int_{\mathbb{R}}\int_\Omega |g(t)e^{-itX}|\,d\mathbb{P}\,dt = \|g\|_{\mathcal{L}^1} < +\infty$ donc de nouveau par Fubini-Tonelli puis

Fubini, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-itX}\,dt\right) = \mathbb{E}(f(X))$

On a donc montré le résultat pour les fonctions dans $\mathcal{F}(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}))$,

Or cet ensemble est dense dans $C_0^0(\mathbb{R})$ (par exemple $S(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}))$ car $S(\mathbb{R}) = \mathcal{F}(S(\mathbb{R}))$, et $S(\mathbb{R})$ dense dans $C_0^0(\mathbb{R})$ ($C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$)) Soit $f \in C_0^0(\mathbb{R})$, on peut donc prendre $g \in \mathcal{F}(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}))$ telle que $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$. Alors

$|\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| \leq |\mathbb{E}((f-g)(X_n))| + \underbrace{|\mathbb{E}(g(X_n)) - \mathbb{E}(g(X))|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + |\mathbb{E}((f-g)(X))|$

et $|\mathbb{E}(f-g)(X_n)| + |\mathbb{E}((f-g)(X))| \leq 2\|f-g\|_\infty \leq 2\varepsilon$.

Ainsi $\limsup_{n\to+\infty} |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| \leq 2\varepsilon$

D'où la convergence puisque ε est quelconque. On a donc montré la CV pour toute $f \in C_0^0(\mathbb{R})$, ce qui implique $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ d'après le lemme 1.

Preuve du lemme 2 : la suite $\left(\frac{Z_n}{n}\right)$ tend vers 0, on peut donc supposer que $\left(1 + \frac{Z_n}{n}\right)$ ne touche pas la demi droite $\mathbb{R}_-$ (quitte à se placer à partir d'un N assez grand pour que $\forall n \geq N$, $1 + \frac{Z_n}{n} \in B(1, \frac{1}{2})$) Il est donc possible d'utiliser la détermination principale du logarithme, notée $\log$:

$\left(1 + \frac{Z_n}{n}\right)^n = \exp\left(n \log\left(1 + \frac{Z_n}{n}\right)\right)$

Or la détermination principale du log étant holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, elle est analytique sur cet ouvert, et admet donc un DL au voisinage de 1, qui coïncide nécessairement avec celui du logarithme népérien, ainsi :

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = \exp\left(n\times\left(\frac{z_n}{n}+o\left(\frac{z_n}{n}\right)\right)\right) = \exp(z_n+o(1))$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\right) = e^{z}$.

<u>Preuve du théorème 2</u> : Quitte à centrer et réduire nos variables (en posant $Y_n = \frac{X-\mu}{\sigma}$), on peut supposer $\mu=0$ et $\sigma=1$. On sait donc grâce au théorème 1 qu'il faut montrer $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \longrightarrow e^{-t^2/2}$.

Soit φ_{X_1} la fonction caractéristique de X_1. Comme $X_1\in L^2$, φ_{X_1} est de classe C^2 avec $\varphi_{X_1}'(0)=E(iX_1)=0$, $\varphi_{X_1}''(0)=E(-X_1^2)=-1$ par hypothèse. Or,

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = E\left(e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right) = E\left(\prod_{k=1}^{n} e^{it\frac{X_k}{\sqrt{n}}}\right) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{k=1}^{n} E\left(e^{it\frac{X_k}{\sqrt{n}}}\right) \overset{i.d.}{=} \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

Donc en faisant un développement de Taylor de φ_{X_1} à l'ordre 2 en 0 on obtient :

$$\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \varphi_{X_1}(0) + \frac{t}{\sqrt{n}}\varphi_{X_1}'(0) + \frac{t^2}{2n}\varphi_{X_1}''(0) + \frac{\varepsilon_n}{n} \quad \text{où } \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
$$= 1-\frac{t^2}{2n}+\frac{\varepsilon_n}{n}.$$

Ainsi en réinjectant cela dans ce qui précède, on obtient :

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1-\frac{t^2}{2n}+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n = \left(1+\frac{\varepsilon_n-\frac{t^2}{2}}{n}\right)^n \quad \text{où } \underbrace{\varepsilon_n-\frac{t^2}{2}}_{=z_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{-t^2}{2}$$

Donc en utilisant le lemme 2, on obtient bien $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$ ce qui conclut.

<u>Remarques</u> : * Le thm de Levy comprend une deuxième assertion plus forte : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des VAR tq $\varphi_{X_n}\longrightarrow\varphi$ simplement, avec φ continue en 0, alors il existe X une VAR tq $\varphi=\varphi_X$ et $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. (+ dur à montrer)

* la LGN nous assure qu'avec les hypothèses du TCL, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{ps} \mu$. le TCL nous donne une "vitesse" de convergence : pour n grand, la loi de $\frac{S_n}{n}$ est "environ" $\mathcal{N}(m,\frac{\sigma^2}{n})$, dont la variance décroît en $1/n$.

* le TCL a de très nombreuses applications comme par exemple la détermination d'intervalles de confiance asymptotiques.

* L'hypothèse de moment d'ordre 2 est essentielle : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid $\mathcal{C}(0,1)$, alors $\overline{X_n}\sim\mathcal{C}(0,1)$ donc aucun changement d'échelle ne pourra garantir la CV vers une $\mathcal{N}$.

* le TCL peut s'étendre aux VA non identiquement distribuées, aux vecteurs aléatoires, etc.

* La convergence observée en loi ici peut-elle être réalisée PS, en proba ? Non : On peut construire des contre-exemples à la main :
on suppose toujours $\mu = 0$, $\sigma = 1$, on pose $Y_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ et supposons que $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} L \sim \mathcal{N}(0,1)$ (nécessaire d'après le TCL) donc $Y_{2n} \to L$ également.
On pose maintenant $Z_n = \frac{X_{n+1} + X_{n+2} + \dots + X_{2n}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$
Or $Z_n = \frac{\sqrt{2n}\, Y_{2n} - \sqrt{n}\, Y_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}\, Y_{2n} - Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \underbrace{(\sqrt{2} - 1)}_{\alpha} \times L \sim \mathcal{N}(0, \alpha^2)$ ↯

* Le TCL nous dit que les fluctuat° de S_n autour de sa moyenne sont d'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$. De ⊕, pour $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > \frac{1}{2}$, on a CV en loi vers 0, pour $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha < \frac{1}{2}$, on n'a aucune CV. Pour aller ⊕ loin, le cas limite est obtenu pour $\sqrt{2n \log\log n}$: c'est la loi du logarithme itéré : si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid tq $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, alors $\mathbb{P}\left(\limsup_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{2 \log\log n}} = 1\right) = 1$.
Cela peut permettre de remontrer que la CV du TCL ne peut se faire qu'en loi.

* Idée rapide de la structure de la preuve pour introduction : on se ramène grâce au thm de Lévy à montrer la CV pour les monômes trigonométriques grâce à la transformat° de Fourier et cela permet d'obtenir le TCL en effectuant un dev de Taylor de l'exp qu'on connait bien !

* Pour les leçons 261-262-250-239, dans un premier temps, zapper le lemme 2 (et aviser avec le reste du temps), pour la leçon 218, zapper le lemme 1 (et aviser de même à la fin).