Projection sur un convexe fermé

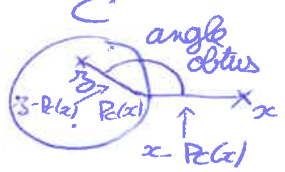
↳ Ref : Hirsch-Lacombe p 91 (et poly de Karine p 37)

Soit $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert.

Théorème de projection sur un convexe fermé : Soit C une partie fermée, convexe et non vide de H. Alors :

1) Pour tout $x \in H$, il existe un unique point $P_C(x)$ de C tel que $\|x - P_C(x)\| = \mathrm{dist}(x, C) := \inf\{\|x-y\|, y \in C\}$. Ce point est appelé projection de x sur C.

2) Il est caractérisé par la propriété suivante : (angle obtus)
$$P_C(x) \in C \text{ et } \forall z \in C,\ \mathrm{Re}(\langle x - P_C(x), z - P_C(x)\rangle) \leq 0$$



3) De plus, $P_C : H \to C$ est 1-lipschitzienne : pour tout $x, y \in H$,
$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|.$$

4) En particulier, si F est un SEV fermé de H, alors pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est caractérisé par $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$.

Preuve du théorème : 1) Existence : Soit $x \in H \setminus C$. On pose $d = \mathrm{dist}(x, C)$.
Cette distance étant définie comme un inf, il existe une suite minimisante $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de C, telle que $\|x - y_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} d$.
Nous allons montrer que la suite (y_n) est une suite de Cauchy.
Soit $n, p \in \mathbb{N}$, d'après l'identité du parallélogramme, on a :
$$\|y_n - y_p\|^2 = \|(x - y_p) - (x - y_n)\|^2$$
$$= 2(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_n\|^2) - \|2x - (y_p + y_n)\|^2$$
$$= 2(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_n\|^2) - 4\left\|x - \frac{(y_p + y_n)}{2}\right\|^2$$

Or $\frac{y_p + y_n}{2} \in C$ car C est convexe donc $\left\|x - \frac{(y_p+y_n)}{2}\right\|^2 \geq d^2$

donc $$\|y_n - y_p\|^2 \leq 2(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_n\|^2) - 4d^2$$
$$\leq 2\Big(\underbrace{(\|x - y_p\|^2 - d^2)}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0} + \underbrace{(\|x - y_n\|^2 - d^2)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}\Big)$$

Or pour $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d^2 \leq \|x - y_n\| \leq d^2 + \varepsilon$
et alors si $n, p \geq N$, on a $\|y_n - y_p\|^2 \leq 4\varepsilon$. Ainsi la suite (y_n) est de Cauchy, or H est complet donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $y \in H$.
Or C est fermé donc $y \in C$, et $\|x - y\| = d$.
On a ainsi démontré l'existence d'au moins un point y de C réalisant $\mathrm{dist}(x, C)$.

Unicité : Soit y_1, y_2 deux points de C tels que $\|x-y_1\| = \|x-y_2\| = d$.
Alors en appliquant de nouveau l'identité du parallélogramme de la même façon, on obtient :

$$\|y_1 - y_2\|^2 \leq 2\Big(\underbrace{(\|x-y_1\|^2 - d^2)}_{=0} + \underbrace{(\|x-y_2\|^2 - d^2)}_{=0}\Big)$$

donc $y_1 = y_2$, et cela montre que $dist(x, C)$ est atteinte en, au plus, un point de C.

Ces deux étapes légitiment la définition de $P_C(x)$ comme l'unique point de C vérifiant $\|x - P_C(x)\| = dist(x, C)$.

2) "$\Rightarrow$" Montrons que $y = P_C(x)$ vérifie la propriété. Soit $z \in C$. Alors pour $t \in]0,1]$, $(1-t)y + tz \in C$ par convexité et donc

$$0 \leq \|\underbrace{x - ((1-t)y + tz)}_{(x-y)-t(z-y)}\|^2 - \|x-y\|^2 \text{, donc en développant :}$$

$$0 \leq t^2\|z-y\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}(\langle x-y, z-y\rangle)$$, en divisant cette relation par t puis en faisant tendre $(t \to 0]$, on obtient :

$$\mathrm{Re}(\langle x-y, z-y\rangle) \leq 0.$$

"$\Leftarrow$" Réciproquement, supposons que $y \in C$ vérifie la propriété.
Alors pour $z \in C$,

$$\|x-z\|^2 = \|(x-y)-(z-y)\|^2 = \|x-y\|^2 + \|z-y\|^2 - 2\mathrm{Re}(\langle x-y | z-y\rangle)$$
$$\geq \|x-y\|^2$$

donc $\|x-y\| = dist(x, C)$ et $y = P_C(x)$.

3) Montrons que $x \mapsto P_C(x)$ est 1-lipschitzienne. Soit $x_1, x_2 \in H$.
Notons $y_1 = P_C(x_1)$ et $y_2 = P_C(x_2)$. Alors

$$\|x_1 - x_2\|^2 = \|((x_1-y_1)-(x_2-y_2)) + (y_1-y_2)\|^2$$
$$= \|y_1-y_2\|^2 + \|(x_1-y_1)-(x_2-y_2)\|^2$$
$$- 2\mathrm{Re}(\langle y_2-y_1, x_1-y_1\rangle) - 2\mathrm{Re}(\langle y_1-y_2, x_2-y_2\rangle)$$
$$\geq \|y_1-y_2\|^2$$

Donc $\|y_1-y_2\| \leq \|x_1-x_2\|$ ie P_C est bien une application 1-lipschitzienne.

(pour $x \in C$, le projeté est évidemment défini par $P_C(x) = x$, qui vérifie bien la caractérisat° du point 2)

4) On se place désormais dans le cas où le sous espace considéré est F un SEV fermé de H. Comme F est un convexe fermé non vide, P_F est bien définie. Soit $x \in H$.

On a vu que $P_F(x)$ est caractérisé par :

$y \in F$ et $\forall z \in F$, $\mathcal{Re}(\langle x-y | z-y \rangle) \leq 0$.

Or pour $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, l'application $z' \mapsto y + \lambda z'$ est une bijection de F dans lui même, donc la caractérisation devient

$y \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$, $\forall z' \in F$, $\mathcal{Re}(\lambda \langle x-y | z' \rangle) \leq 0$

ce qui équivaut (en prenant $\lambda = \pm 1$, $\lambda = \pm i$) à :

$y \in F$ et $x-y \in F^\perp$ ($\forall z' \in F$, $\langle x-y, z' \rangle = 0$).

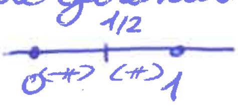
__Remarques__ : * Dans le cas où F est un SEV de dim finie, $P_F(x)$ se calcule facilement de deux manières possibles :

- soit en projetant à l'aide d'une BON $(b_1, \dots, b_n)$: $P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, b_i \rangle b_i$ (et alors $\text{dist}(x,F) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, b_i \rangle|^2$)
- soit en utilisant $\begin{cases} P_F(x) \in F \\ (x - P_F(x)) \perp F \end{cases}$ qui nous donne n équations à n inconnues.

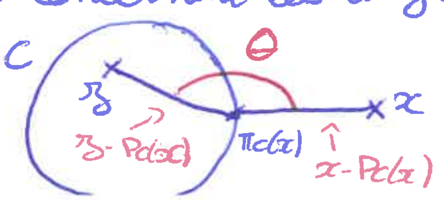
* Concernant les hypothèses :

- il n'est pas nécessaire de supposer H tout entier complet, H pré-hilbertien et C complet suffit. Contre ex sans complétude : $(\mathcal{E}^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2) =: H_1$ et $F_1 = \{ f \in \mathcal{E}^0([0,1], \mathbb{R}), \int_0^{1/2} f = 0 \} = \mathcal{E}^0 \cap \underbrace{\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}^{\perp}}_{=: F}$, alors H_1 est un préhilbertien (pas complet !)
F_1 est fermé de H_1 mais $\text{dist}_{\|\cdot\|_2}(f, F_1)$ n'est atteinte pour aucun $f \in H_1 \setminus F_1$:
si $f \in H_1 \setminus F_1$, en approximant $P_F(f)$ en norme $\|\cdot\|_2$ par des fct° continues, on voit que $\text{dist}_{\|\cdot\|_2}(f, F_1) = \text{dist}_{\|\cdot\|_2}(f, F)$. Or cette distance est atteinte en $P_F(f) = f - 2\left(\int_0^{1/2} f\right) \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}$ qui n'est pas continue, donc $\|f-g\|_2 > \text{dist}(f, F_1)$ $\forall g \in F_1$

- Contre ex sans caractère fermé : $H = (L^2([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ Hilbert, $F = C^0([0,1])$ est un SEV de H mais pas fermé. Par densité, pour $f \in H \setminus F$, $\text{dist}(f, F) = 0$ mais il n'existe pas de $g \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ tq $\|f-g\|_2 = 0$. Idem avec $F = \mathbb{R}[X]$.

- Contre ex sans convexité : (convexité garantit l'unicité) $C = \{0, 1\}$ dans $\mathbb{R}$, fermé mais pas convexe,  $\Rightarrow$ pas d'unicité du projeté pour $x = 1/2$.

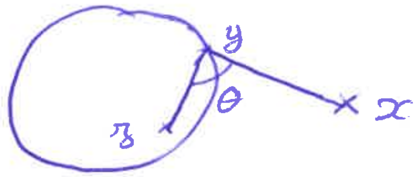
* Concernant les angles obtus : en dim 2 :



$$\theta = \arccos\Bigg(\underbrace{\frac{\langle z - \Pi_C(x), x - \Pi_C(x) \rangle}{\|z - \Pi_C(x)\| \, \|x - \Pi_C(x)\|}}_{\leq 0} \Bigg) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$\Rightarrow$ angle obtus

On voit alors bien qu'en les autres points cette condition n'est pas vérifiée :



θ pas obtus !

Dans le cas non convexe également :

θ non obtus !

* L'une des applications principales est le théorème de Riesz. Grâce au TPCF, on montre le TSO : Si F est un SEV fermé de H, alors $H = F \oplus F^{\perp}$.

↳ on a $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ et $\forall x \in H$, $x = \underbrace{P_F(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - P_F(x))}_{\in F^{\perp}}$.

Puis Riesz : $\forall \Phi \in \mathcal{L}_c(H, K)$, $\exists!\, y \in H$, $\forall h \in H$, $\Phi(h) = \langle h, y \rangle$

de $\oplus$, $|||\Phi|||_{\mathcal{L}_c(H,K)} = \|y\|$. (ça ok grâce à Cauchy-Schwartz).

→ Mtq $\Psi : H \to H'$, $y \mapsto \langle \cdot | y \rangle$ est une isométrie bijective

- Isométrie ok par CS donc injectivité ok.
- Surjectivité : Soit $\Phi \in H'$ tq $\Phi \neq 0$. Comme Φ est C^0, $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est un SEV fermé, donc $H = \mathrm{Ker}\,\Phi \oplus (\mathrm{Ker}\,\Phi)^{\perp}$. Comme $\Phi \in E' \setminus \{0\}$, $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est un hyperplan donc $\dim(\mathrm{Ker}\,\Phi)^{\perp} = 1$. Soit $e \in H$ tel que $(\mathrm{Ker}\,\Phi)^{\perp} = \mathbb{R}e$ et $\|e\| = 1$.

Posons $y = \Phi(e)e$ (ou $y = \overline{\Phi(e)}e$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors pour $h = \underbrace{h_1}_{\in \mathrm{Ker}(\Phi)} + \underbrace{\lambda e}_{\in \mathrm{Ker}(\Phi)^{\perp}} \in H$

on a $\Phi(h) = \lambda \Phi(e) = \langle h, y \rangle$.

→ Cela nous donne un isomorphisme entre H et son dual qui "a le bon goût d'être canonique" !

à éventuellement rajouter si besoin !