Différentielle du déterminant

↳ CVA p 49-50 (lemme) et Rouvière p76-78 et p275-27 pour le reste.

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Lemme : $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition : L'application $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est de classe C^1 et sa différentielle est donnée par : $\forall M, H \in M_n(\mathbb{K})$, $D_M \det(H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{com}(M)H)$

Application : Soient $y_1, \dots, y_n$ des solutions (à valeurs dans $\mathbb{K}^n$) du système différentiel $y' = A(t)y$ où $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{K})$ est une fonction continue et soit $w : t \mapsto \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$ leur déterminant wronskien.
Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $w'(t) = \mathrm{tr}(A(t))\, w(t)$. En particulier, on retrouve que pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(e^{tA}) = e^{t\,\mathrm{Tr}(A)}$.

Preuve du lemme : On munit $M_n(\mathbb{K})$ d'une norme quelconque (toutes équivalentes). Alors le déterminant est une fonction polynomiale donc en particulier continue. Alors $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\underbrace{\mathbb{K}^*}_{\text{ouvert}})$ est un ouvert.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrons qu'il existe une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $GL_n(\mathbb{K})$ qui converge vers A. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on prend la suite constante égale à A. Supposons donc $A \notin GL_n(\mathbb{K})$. Alors 0 est valeur propre de A.
On considère $Sp(A) \setminus \{0\}$, il est fini (éventuellement vide). S'il est non vide, $m := \min(|\lambda|, \lambda \in Sp(A) \setminus \{0\})$ est bien défini et on se donne s entier tel que $s > \frac{1}{m}$. S'il est vide, on choisit s un entier quelconque.
Alors pour tout $k \geq s$, $A - \frac{1}{k} I_n$ est inversible puisque $\frac{1}{k}$ n'est pas valeur propre. Ainsi $(A - \frac{1}{k} I_n)_{k \geq s}$ est une suite de $GL_n(\mathbb{K})$ qui converge vers A.

Preuve de la proposition : De nouveau, le déterminant est une fonction polynomiale donc en particulier de classe C^1 (et même de classe C^∞). Il suffit de calculer la différentielle en l'identité.
Etape 1 : Calculons la dérivée de $\det$ en I_n en n'importe quel vecteur. Soit $H \in M_n(\mathbb{K})$, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (complexes). Alors pour $t \in \mathbb{R}$, les valeurs propres de $I_n + tH$ sont les $1 + t\lambda_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Alors $\det(I_n + tH) = \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i)$ ($I_n + tH$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$)

$$= 1 + t\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \underset{t\to 0}{O}(t^2) = 1 + t\,\mathrm{Tr}(H) + \underset{t\to 0}{O}(t^2)$$

Ainsi $D_{I_n}\det(H) = \mathrm{Tr}(H)$. $\left(f'_v(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = df_a(v) \right)$

Etape 2 : Calculons la différentielle en une matrice inversible.
Soit $X \in Gl_n(\mathbb{K})$. Nous allons nous ramener au cas de l'identité.
Soit $H \in M_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det(X+H) = \det(X) \times \det(I_n + X^{-1}H) = \det(X) \times (1 + Tr(X^{-1}H) + o(\|H\|))$$
$$= \det(X) + Tr(\underbrace{\det(X)X^{-1}}_{{}^t com(X)} H) + o(\|H\|)$$

d'où $D_X \det(H) = Tr({}^t com(X) H)$.

Etape 3 : Conclure par densité. Puisque det est de classe C^1, sa différentielle est continue. L'application $X \mapsto {}^t com(X)$ est également continue (car polynomiale en les coefficients de X), donc $X \mapsto Tr({}^t com(X) \cdot)$ aussi. Ainsi ces deux fonctions sont continues et coïncident sur $Gl_n(\mathbb{K})$ qui est dense dans $M_n(\mathbb{K})$, elles sont donc égales sur $M_n(\mathbb{K})$ tout entier. Ainsi : $\forall (M, H) \in M_n(\mathbb{K})^2$, $D_M \det(H) = Tr({}^t com(M) H)$.

Preuve de l'application : On définit Y la matrice de colonnes $y_1, \dots, y_n$. Alors Y vérifie $Y' = AY$. Par théorème de dérivation des fonctions composées, on obtient alors pour tout $t \in \mathbb{R}$: $(w = \det \circ Y)$

$$w'(t) = (\det \circ Y)'(t) = D_{Y(t)} \det(Y'(t)) \quad (d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a))$$
$$= Tr({}^t com(Y(t)) Y'(t)) = Tr({}^t com(Y(t)) A(t) Y(t))$$
$$= Tr(A(t) \underbrace{Y(t)\, {}^t com(Y(t))}_{\det(Y(t)) I_n = w(t) I_n}) \text{ par symétrie de la trace}$$
$$= Tr(A(t)) w(t).$$

On peut alors obtenir l'expression de w : pour $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $w(t) = w(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} Tr(A(s))ds\right)$. Cette expression montre l'une des propriétés fondamentales du wronskien : il s'annule en un point si et seulement s'il est identiquement nul.
De plus si A est constante, le système $Y' = AY$ admet pour solution $Y = e^{tA}$, d'où pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\det(e^{tA}) = w(t) = w(0) \exp\left(\int_0^t Tr(A)ds\right) = \exp(t\,Tr(A)).$$

[Bonus] Autre application : L'ensemble $Sl_n(\mathbb{R}) = \{A \in Gl_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ est une sous variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension n^2-1, et d'espace tangent en M donné par $T_M Sl_n(\mathbb{R}) = \{H \in M_n(\mathbb{R}),\ Tr(M^{-1}H) = 0\}$

Preuve de l'application : Nous allons utiliser la caractérisation par équation. On définit $F : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Alors $Sl_n(\mathbb{R}) = F^{-1}(\{0\})$.

De plus, d'après ce qu'il précède, F est de classe C^1 et pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$, $d_M F(H) = Tr({}^t com(M) H)$.
Donc pour tout $M \in Sl_n(\mathbb{R})$, $d_M F$ est une forme linéaire non nulle ($d_M F(M) = Tr({}^t com(M) M) = n \det(M) \neq 0$) donc surjective. (Ainsi F est une "submersion"). Ainsi $Sl_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de $M_n(\mathbb{R})$ (iso à $\mathbb{R}^{n^2}$) de dimension n^2-1.
(Double bonus) De plus, pour tout $M \in Sl_n(\mathbb{R})$, on sait que $T_M Sl_n(\mathbb{R}) = \ker(D_M F)$, d'où $T_M Sl_n(\mathbb{R}) = \{H \in M_n(\mathbb{R}), Tr(M^{-1}H) = 0\}$.
(en l'identité on obtient les matrices de trace nulle).

<u>Remarques</u> : * Petit rappel sur la définition de la comatrice :
on note $A_{i,j}$ la matrice A privée de sa ième ligne et de sa jème colonne
alors $com(A) = ((-1)^{i+j} \det(A_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$, et alors $A\,{}^t com A = {}^t com(A) A = \det(A) I_n$
d'où $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t com(A)$ si $\det(A) \neq 0$
* Le calcul de la différentielle du déterminant peut se faire de plein d'autres façons, typiquement en utilisant sa définition :
$\det(I_n + H) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) (I_n+H)_{1,\sigma(1)} \cdots (I_n+H)_{n,\sigma(n)}$, et si $\sigma \neq Id$,
alors $\exists k \neq l$ tq $\sigma(k) \neq k$ et $\sigma(l) \neq l$ et alors $(I_n+H)_{1,\sigma(1)} \cdots (I_n+H)_{n,\sigma(n)} = \underset{\|H\| \to 0}{O}(\|H\|)$
donc $\det(I_n+H) = (I_n+H)_{1,1} \cdots (I_n+H)_{n,n} + \underset{\|H\| \to 0}{o}(\|H\|)$
$$= 1 + Tr(H) + \underset{\|H\| \to 0}{o}(\|H\|)$$
et ensuite on termine pareil.
* On peut continuer et calculer la différentielle seconde du déterminant en utilisant le théorème des fonctions composées et le fait que la différentielle de $\begin{array}{ccc} Gl_n(\mathbb{K}) & \to & Gl_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M^{-1} \end{array}$ est $D_M L(H) = -M^{-1} H M^{-1}$:
← linéaire donc diff = elle même
puisque $D_A \det(H) = \det(A) Tr(A^{-1}H)$, on déduit
$D_A^2 \det(H)(K) = \det(A) Tr(A^{-1}K) Tr(A^{-1}H) + \det(A) Tr(-A^{-1}KA^{-1}H)$
* Rappel sur les définitions équivalentes d'une sous variété :
N est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k et de classe C^p si $\forall x_0 \in N$, $\exists W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ tq :
(carte locale)
- $\exists \varphi : W \to \mathbb{R}^n$ C^p difféo tel que $\varphi(N \cap W) = \varphi(W) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k})$
- $\exists u : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ C^p et $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ tel que $W \cap N = \{A(z, u(z)), z \in \mathbb{R}^k\} \cap W$ (graphe)
- $\exists F : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ C^p telle que $dF(x_0)$ soit surjective et $W \cap N = F^{-1}(\{0\})$ (équation, celle utilisée ici)
⇔ submersion
(nappe paramétrée) ⇒ immersion
- $\exists U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^k}(0)$, $i : U \to \mathbb{R}^n$ C^p tels que $i(0) = x_0$, $di(0)$ injective et $i : U \to N \cap W$ homéo

* Quelques commentaires sur le wronskien : dans le cas scalaire $y^{(p)} = a_{p-1} y^{(p-1)} + \dots + a_0 y$, on a alors pour des solutions $v_1, \dots v_p$,

$$w(v_1, \dots v_p) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{(p-1)} & v_2^{(p-1)} & \cdots & v_p^{(p-1)} \end{vmatrix},$$

et alors $w' = a_{p-1} w$. Il peut être utile pour des études qualitatives (cf dev équation de Bessel, pour montrer qu'une solution explose), ou pour obtenir une deuxième solution lorsque l'on en a déjà une.