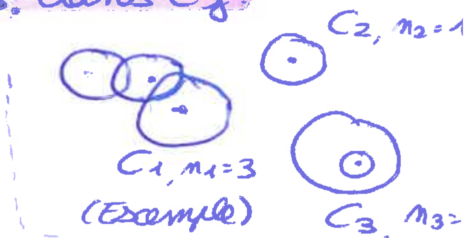
Disques de Gershgorin

↳ Ref : Carnet de voyage en algèbre p29 + p60-61.

Théorème 1 : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. On note pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $D_i(A) = D(a_{i,i}, R_i) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \le R_i\}$ où $R_i = \sum_{j \ne i} |a_{i,j}|$. Alors $Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i(A) =: D(A)$

Lemme : (Admis pour la dev) Soit $(P_k)_{k \ge 0}$ une suite de polynômes unitaires de $\mathbb{C}_n[X]$ de degré n fixé qui converge (pour n'importe quelle norme → équivalentes car dimension finie) vers un polynôme P. On note $(\lambda_{k,i})_{1 \le i \le n}$ (resp $(\lambda_i)_{1 \le i \le n}$) les racines de P_k (resp P) comptées avec multiplicité. Alors on peut ordonner pour tout $k \in \mathbb{N}$ les racines $(\lambda_{k,i})_{1 \le i \le n}$ de P_k de sorte que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_{k,i} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \lambda_i$.

Théorème 2 : Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et soit $\bigcup_{j=1}^{r} C_j$ la décomposition en composantes connexes de $D(A)$. Pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, on note n_j le nombre de disques de Gershgorin $D_i(A)$ inclus dans C_j.
Alors pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, il y a exactement n_j valeurs propres de A dans C_j.



Preuve du théorème 1 : Soit λ une valeur propre de A. Montrons qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda \in D_i(A)$.
Soit $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre de A pour λ. On choisit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|v_{i_0}|$ soit maximal ($\ne 0$). On a $Av = \lambda v$, donc en particulier pour la i_0-ème coordonnée : $\lambda v_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} v_j$. Donc par inégalité triangulaire :

$$|\lambda - a_{i_0,i_0}| = \frac{1}{|v_{i_0}|} \left| \sum_{j \ne i_0} a_{i_0,j} v_j \right| \le \sum_{j \ne i_0} |a_{i_0,j}| \underbrace{\frac{|v_j|}{|v_{i_0}|}}_{\le 1}$$

$$\le \sum_{j \ne i_0} |a_{i_0,j}|$$

Donc $\lambda \in D_{i_0}(A)$, et ainsi $Sp(A) \subset \bigcup_{j=1}^{n} D_j(A)$.

Avant de passer à la suite, deux remarques :

* Puisque $Sp(A) = Sp({}^tA)$, on obtient donc une localisation un peu plus précise : $Sp(A) \subset D(A) \cap D({}^tA)$
* Pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont exactement les $a_{i,i}$, donc ça marche bien (d'autant plus dans le cas diagonale, où l'on obtient $D(a_{i,i}, 0)$). Bon mais alors quelle intuition cela donne ?

A

On aurait envie de dire que comme dans le cas triangulaire, chaque disque contient exactement une valeur propre. Mais ça, c'est faux en général. Contre exemple : on considère $A=\begin{pmatrix}0&6\\1&1\end{pmatrix}$, alors $\chi_A = X(X-1)-6 = X^2-X-6 = (X+2)(X-3)$, $\lambda_1=-2$ et $\lambda_2=3$.
Or $D_1=D(0,6)$ et $D_2=D(1,1)$.
On va obtenir le résultat en passant aux composantes connexes.

Preuve du théorème 2 : On considère le chemin continu $A(t)$ pour $t\in[0,1]$ défini par $A(t)=(a_{i,j}(t))_{1\le i,j\le n}$ où $a_{i,j}(t)=\begin{cases}a_{i,i} & \text{si } i=j\\ t\,a_{i,j} & \text{sinon}\end{cases}$
Alors $A(0)=\mathrm{Diag}(a_{1,1},\dots,a_{n,n})$ et $A(1)=A$. (*)
On définit l'ensemble $I=\{t\in[0,1] \mid$ il existe n_j valeurs propres de $A(t)$ dans $C_j\}$
Alors $0\in I$ puisque ses valeurs propres sont les $a_{i,i}$, centre de $D_i(A)$, il y a donc n_j éléments $a_{i,i}$ dans C_j par déf. L'objectif est donc de montrer que $1\in I$. Soit t_0 la borne supérieure de I (bien définie puisque I est non vide). Montrons que $t_0\in I$. Puisque $t_0=\sup(I)$, il existe une suite $(t_k)_k$ de I qui tend vers t_0. Alors en particulier $(A(t_k))_k$ tend vers $A(t_0)$. D'après le lemme, il est possible de réorganiser les valeurs propres de $(A(t_k))$ de sorte qu'elles tendent vers les valeurs propres de $A(t_0)$. On les note respectivement $((\lambda_{k,i})_{1\le i\le n})_k$ et $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ en supposant que l'on ait réorganisées et que $\lambda_{k,i}\longrightarrow\lambda_i$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$. Soit $i\in[\![1,n]\!]$, alors $\lambda_i\in D(A(t_0))\subset D(A)$) donc il il existe $j_i\in[\![1,r]\!]$ tel que $\lambda_i\in C_{j_i}$ (puisque composante connexe),
Or C_{j_i} est un ouvert de $D(A)$ (car composante connexe), donc il existe un rang $k_i\in\mathbb{N}$ à partir duquel $\lambda_{k,i}\in C_{j_i}$.
On définit $K=\max(k_i)$, et alors $\forall k\ge K$, $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\lambda_{k,i}\in C_{j_i}$.
Soit $j\in[\![1,r]\!]$. Puisque t_K appartient à I, il existe exactement n_j valeurs propres de $A(t_K)$ dans C_j, que l'on note $\lambda_{K,i_1},\dots,\lambda_{K,i_{n_j}}$, et d'après ce qui précède, les suites $(\lambda_{k,i_1})_{k\ge K}$, … $(\lambda_{k,i_{n_j}})_{k\ge K}$ restent dans C_j. Puisque C_j est fermé dans $D(A)$ (de nouveau en tant que composante connexe), on en déduit que $\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_{n_j}}$ sont dans C_j. Ainsi il existe au moins n_j valeurs propres de $A(t_0)$ dans C_j, et ceci pour tout $j\in[\![1,r]\!]$.
Or $\sum_{j=1}^{r} n_j = n$, donc il y a exactement n_j valeurs propres de $A(t_0)$ dans C_j, ainsi $t_0\in I$, donc $t_0=\max(I)$.

(*) Pour tout $t\in[0,1]$, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{j\ne i} t|a_{i,j}| \le \sum_{j\ne i}|a_{i,j}|$, donc $D_i(A(t))\subset D_i(A)$ et ainsi $D(A(t))\subset D(A)$.

Il s'agit maintenant de montrer que $t_0 = 1$. Supposons par l'absurde $t_0 < 1$. Alors il existe k_0 tel que $t_0 + \frac{1}{k_0} < 1$, et donc $\forall k \geq k_0$, $t + \frac{1}{k} < 1$, et ainsi la suite $(t_k = t_0 + \frac{1}{k})_{k \geq k_0}$ est une suite de $[0,1] \setminus I$ qui converge vers t_0, et donc $(A(t_k))$ tend vers $A(t_0)$. De la même façon que ce qui précède, quitte à réordonner les valeurs propres des $A(t_k)$, elles convergent vers les valeurs propres de $A(t_0)$, et donc il existe un rang à partir duquel chaque suite reste piégée dans sa composante connexe, et donc il existe un certain rang k_0 tel que la matrice $A(t_{k_0})$ possède exactement n_j valeurs propres dans C_j, donc $t_{k_0} \in I$, or $t_{k_0} > t_0$, ce qui contredit la maximalité de t_0. Ainsi $t_0 = 1$.
Donc $1 \in I$, et cela nous donne directement le résultat.

Avant de passer aux remarques, quelques idées de preuve du lemme :

Preuve du lemme (idée) : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on choisit i_k tel que $|\lambda_1 - \lambda_{k,i_k}|$ soit minimal. Alors $0 \leq |\lambda_1 - \lambda_{k,i_k}|^n \leq \prod_{i=1}^{n} |\lambda_1 - \lambda_{k,i}| = |P_k(\lambda_1)| \xrightarrow[k \to +\infty]{} |P(\lambda_1)| = 0$ et ainsi $\lambda_{k,i_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \lambda_1$. On note $\lambda_{k,1}$ le λ_{k,i_k}.
On écrit alors $P = (X - \lambda_1) Q$ et $P_k = (X - \lambda_{k,1}) Q_k$, et alors on peut montrer en s'intéressant aux coefficients de Q_k que $(Q_k)_k$ converge vers Q, et on peut donc procéder par récurrence.
Ce résultat donne évidemment la même chose pour les valeurs propres de $(A_k)_k$ qui converge vers A en utilisant le fait que les valeurs propres d'une matrice sont les racines de son polynôme caractéristique et le fait que $M \mapsto \chi_M$ est continue.

Remarques : * Ce lemme peut s'exprimer mieux avec des notions plus compliquées en disant que le spectre $M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^n / S_n$ est continu.
* Grâce au théorème 1, on retrouve le lemme d'Hadamard : si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ vérifie : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$, alors A est inversible. En effet cette inégalité assure que 0 n'appartient à aucun disque de A, et ne peut donc pas être valeur propre.
En fait ces deux assertions sont équivalentes.
* On déduit du deuxième théorème que si les disques sont 2 à 2 disjoints, la matrice est diagonalisable.
* En passant par les matrices compagnons, on en déduit une localisation des racines d'un polynôme (le théorème 1 nous donne la borne [illegible]