Isométries du tétraèdre et du cube

↳ Ref : H2G2[1], p 361 - 366

Pour X un ensemble de points de $\mathbb{R}^3$, on notera par la suite $Is(X)$ le sous groupe des isométries de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ qui stabilise X et $Is^+(X)$ le sous groupe des déplacements de $Is(X)$.

Lemme : Soit $X \subset \mathbb{R}^3$. Soit Σ un ensemble fini de points tel que X soit l'enveloppe convexe de ces points. On suppose de plus que les points de Σ sont les points extrémaux de X. Alors $Is(X)$ stabilise Σ.

Théorème 1 : Les groupes d'isométries du tétraèdre sont :

$Is(T) \simeq S_4$ et $Is^+(T) \simeq A_4$

Théorème 2 : Les groupes d'isométries du cube sont :

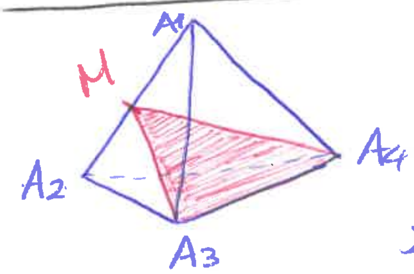
$Is^+(C) \simeq S_4$ et $Is(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Une remarque avant de commencer : on parle "du" tétraèdre et "du" cube car si φ est une similitude, $Is(\varphi(X)) \simeq Is(X)$ donc on peut étudier n'importe quels tétraèdre et cube. (★)[1]

Preuve du lemme : Soit $g \in Is(X)$. Alors g^{-1} appartient en particulier au groupe affine de $\mathbb{R}^3$, donc elle conserve les barycentres (ie si G est le barycentre de la famille (A_i, λ_i) alors $g^{-1}(G)$ est le barycentre de la famille $(g^{-1}(A_i), \lambda_i)$) Soit $A \in \Sigma$. Supposons (par l'absurde) $g(A) \notin \Sigma$. Alors $g(A)$ est un barycentre (non trivial) de points de $X \setminus \{g(A)\}$. Mais alors comme g^{-1} conserve les barycentres, donc A est un barycentre (non trivial) de points de $X \setminus \{A\}$ ↯ Donc g stabilise Σ.

Preuve du théorème 1 : Les points $\underbrace{\{A_1, A_2, A_3, A_4\}}_{=\mathcal{E}}$ sont les points extrémaux de T. Ainsi d'après le lemme, si $g \in Is(T)$, elle fixe ces points donc il existe $\sigma_g \in S_4$ telle que $\forall i \in [\![1,4]\!]$, $g(A_i) = A_{\sigma_g(i)}$. On fait donc agir $Is(T)$ sur $\mathcal{E}$ et l'on a alors le morphisme suivant associé à l'action $\varphi : Is(T) \longrightarrow S(\mathcal{E}) \simeq S_4$

$$g \longmapsto \sigma_g$$

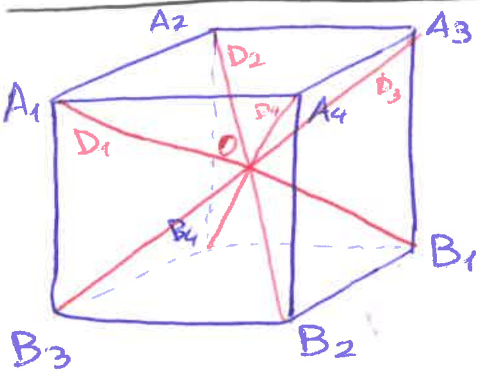


★ Montrons que φ est injectif. Soit $g \in Is(T)$ telle que $\varphi(g) = Id$. Alors φ fixe (A_1, A_2, A_3, A_4), qui est un repère affine, donc $\varphi = Id$.

★ Montrons que φ est surjectif. Puisque S_4 est engendré par les transpositions, il suffit de montrer que celles-ci sont atteintes par φ. On note M le milieu de $[A_1, A_2]$. Alors la reflexion par rapport au plan (MA_3A_4) a pour image $(1\ 2)$.

On peut de même réaliser les autres transpositions, ainsi φ est surjectif.
Ainsi φ est un isomorphisme, donc $\boxed{Is(T) \simeq S_4}$.
Or $Is^+(T)$ est d'indice 2 dans $Is(T)$ (en tant que noyau du det), et le seul groupe d'indice 2 de S_4 est A_4 (3), donc
$\boxed{Is^+(T) \simeq A_4}$

Preuve du théorème 2 : Les points $\{A_1, \dots B_4\}$ sont les points extrêmes de C (*)



Le cube possède 4 grandes diagonales que l'on note $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$. Si $g \in Is(C)$, d'après le lemme, g préserve $\{A_1, \dots B_4\}$, et g préserve les distances donc g préserve $\mathcal{D}$ puisque les diagonales sont les plus grandes distances entre 2 sommets. Ainsi il existe $\sigma_g \in S_4$ telle que $\forall i \in [\![1,4]\!]$, $g(D_i) = D_{\sigma_g(i)}$.

On fait donc agir $Is(C)$ sur $\mathcal{D}$, et l'on a alors le morphisme suivant associé à l'action : $\varphi : Is(C) \to S(\mathcal{D}) \simeq S_4$, $g \mapsto \sigma_g$. Etudions l'image et le noyau de φ.

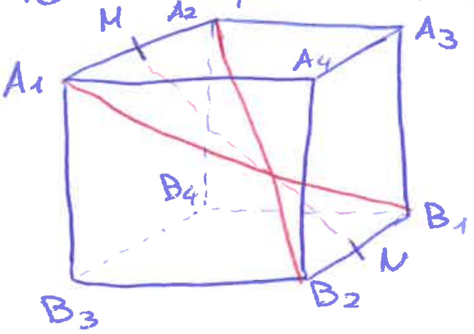
* Etudions $Ker(\varphi)$. Soit $g \in Is^+(C)$ tel que $\varphi(g) = Id$.
Alors pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, on a soit $\begin{cases} g(A_i) = A_i \\ g(B_i) = B_i \end{cases}$, soit $\begin{cases} g(A_i) = B_i \\ g(B_i) = A_i \end{cases}$.

▶ Supposons qu'il existe $i \in [\![1,4]\!]$ tel que l'on soit dans le 1er cas.
On peut supposer sans perdre en généralité que $i = 1$.
Or $g(A_2) \in \{A_2, B_2\}$ et g conserve les distances et donc $A_1A_2 = g(A_1)g(A_2) = A_1 g(A_2)$, mais $A_1A_2 \neq A_1B_2$, donc $g(A_2) = A_2$.
De même A_4 est envoyé sur lui-même. Or (A_1, A_2, A_4, B_2) est un repère affine de l'espace, sur lequel g coïncide avec l'identité, donc $g = Id$.

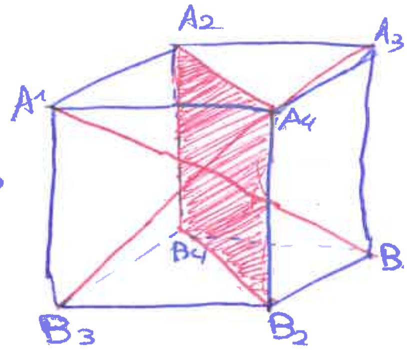
▶ Supposons maintenant que pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, $g(A_i) = B_i$ et $g(B_i) = A_i$. Alors en notant s_0 la symétrie centrale du cube (par rapport au point O), on a $s_0 \circ g$ qui envoie A_i sur A_i pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, et donc comme pour ce qui précède, $s_0 \circ g = id$,
donc $g = s_0$.
Ainsi $Ker(\varphi) = \{Id, s_0\}$

* Montrons que φ est surjective. Comme dans le théorème précédent, il suffit de montrer que les transpositions sont atteintes.

Pour cela, nous allons refaire des dessins :



On note M le milieu de $[A_1, A_2]$ et N le milieu de $[B_1, B_2]$. Alors l'image par φ du retournement d'axe (MN) est la transposition $(1\ 2)$. On réalise de même les transpositions $(2\ 3)$, $(3\ 4)$ et $(1\ 4)$.



Il reste à réaliser les transpositions $(1\ 3)$ et $(2\ 4)$. Par exemple pour $(1\ 3)$, il s'agit de l'image par φ de la reflexion de plan $(A_2A_4B_2)$.
Ainsi φ est surjective.

Si l'on s'intéresse tout d'abord à $Is^+(C)$: en restreignant φ à $Is^+(C)$, on obtient – puisque $s_0 \in Is^-(C)$, un isomorphisme $\boxed{Is^+(C) \simeq S_4}$

Et maintenant pour conclure concernant $Is(C)$:
$\{Id, s_0\} = Ker(\varphi) \lhd Is(C)$ et $Is^+(C) \lhd Is(C)$ (indice 2), $|Is(C)| = |\{Id, s_0\}| \times |Is^+(C)|$
avec $\{Id, s_0\} \cap Is^+(C) = \{Id\}$, et ainsi ⊛² $Is(C) \simeq Is^+(C) \times \{Id, s_0\}$, et donc $\boxed{Is(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$

Avant de passer aux remarques, retour sur les 3 ⊛ :

⊛¹ Lemme : Soit φ une similitude. Alors $Is(X) \simeq Is(\varphi(X))$

Preuve : On considère $\begin{array}{rcl} Is(X) & \to & Is(\varphi(X)) \\ g & \mapsto & \varphi g \varphi^{-1} \end{array}$ bien définie, c'est un iso de groupes.

⊛² Lemme : Soit G un groupe, et $N, H \lhd G$ tels que $|N||H| = |G|$ et $N \cap H = \{e\}$. Alors $G \simeq N \times H$.

Preuve : On définit $\varphi : \begin{array}{rcl} N \times H & \to & G \\ (n, h) & \mapsto & nh \end{array}$

▸ φ est injective : $n_1h_1 = n_2h_2 \iff \underbrace{n_2^{-1}n_1}_{\in N} = \underbrace{h_2h_1^{-1}}_{\in H} \in N \cap H = \{e\}$

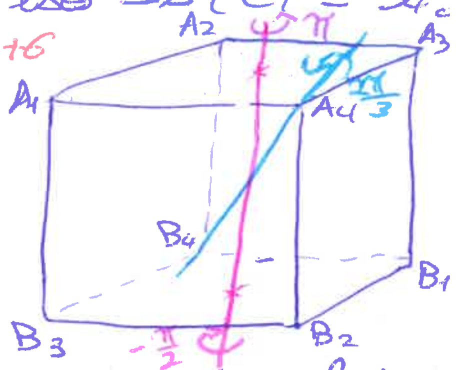
▸ φ est un morphisme : $n_1h_1n_2h_2 = n_1n_2h_1h_2 \iff h_1n_2 = n_2h_1$
$\iff \underbrace{n_2^{-1}h_1n_2h_1^{-1}}_{\substack{\in H \quad \in N \\ \in H \cap N}} = e$ ok

▸ φ est un isomorphisme : φ est un morphisme injectif et $|N||H| = |G|$ donc φ est un isomorphisme.

⊛³ Lemme : A_n est l'unique sous groupe d'indice 2 de S_n

Preuve : Si $H \lhd S_n$, alors $S_n/H \simeq \{\pm 1\}$, donc $\varphi \circ \pi_H : S_n \to \{\pm 1\}$ morphisme non trivial donc $\varphi \circ \pi_H = \varepsilon$, et $H = Ker(\varepsilon) = A_n$

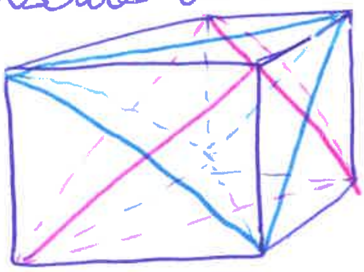
Remarques : ✱ On peut faire le catalogue de l'iso $Is^+(C) \simeq S_4$:



- Id ok, et on a déjà vu les transpositions ×1+6
- ⊙ Les 3 cycles sont réalisés par des rotations ×8 autour des axes Di d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$, par exemple $(1\ 2\ 3)$ dans le cas du dessin
- ⊙ Les 4 cycles correspondent aux rotations ×6 autour de l'axe passant par 2 faces opposées d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$, $(1\,2\,3\,4)$ sur le dessin
- ⊙ les doubles transpositions correspondent aux rotations autour de ×3 l'axe passant par 2 faces opposées d'angle $+\pi$, $(1\ 3)(2\,4)$ sur le dessin

✱ Grâce à ce catalogue, on peut dénombrer le nombre de façons de colorier un cube avec n couleurs, on a une action $Is^+ \times \mathcal{F}(\Phi, C) \to \mathcal{F}(\Phi, C)$
$(g, f) \mapsto f \circ g^{-1}$
où $\mathcal{F}(\Phi, C)$ = ensemble des fct° allant de Φ l'ensemble des faces du cube dans C l'ensemble des couleurs. On a la formule de Burnside $|\Omega| = \frac{1}{|Is^+|} \times \sum_{g \in Is^+} |Fix(g)|$
et alors on compte pour g dans chaque classe le nombre de coloriages invariants par g, et la somme nous donne le nombre de façons de colorier notre cube (à isométrie positive près)

✱ On peut retrouver l'iso de $Is^+(T)$ en considérant les 2 tétraèdres inscrits dans le cube : (ça me semble pas vraiment évident mais soit)



✱ On peut étudier en utilisant le même type de techniques les isométries des autres solides platoniciens :

- l'octaèdre (8 faces) $Is(O) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $Is^+(O) \simeq S_4$
- le dodécaèdre (12 faces) $Is(D) \simeq A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $Is^+(D) \simeq A_5$
- l'icosaèdre (20 faces) $Is(I) \simeq A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $Is^+(I) \simeq A_5$

on les obtient par dualité du cube et du dodécaèdre

✱ Pour ces histoires de points extrémaux : voir Combes, Algèbre et géométrie.