Décomposition polaire

↳ Ref : H2G2 Tome 1, p 202-205

Lemme 1 : $O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $M_n(\mathbb{R})$

Lemme 2 : $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = S_n^{+}(\mathbb{R})$

Lemme 3 : Sur un espace métrique compact, toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui possède une unique valeur d'adhérence converge (vers cette valeur d'adhérence).

Théorème : (Décomposition polaire) L'application $\mu : \begin{array}{l} O_n(\mathbb{R})\times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (O\,,\,S) \longmapsto OS \end{array}$ est un homéomorphisme.

Corollaire 1 : Pour toute matrice $A\in GL_n(\mathbb{R})$, on a $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$

Corollaire 2 : (Maximalité du groupe orthogonal) Tout sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient $O_n(\mathbb{R})$ est le groupe $O_n(\mathbb{R})$ lui même.

Preuve du théorème : Plan de la preuve : 1) Bonne définition et continuité 2) Surjectivité 3) Injectivité 4) Continuité de μ^{-1}. C'est partiii !

1) L'application μ est bien définie (car $\det(OS)=\det(O)\det(S)\neq 0$ donc $OS\in GL_n(\mathbb{R})$) et continue (car polynomiale en les coefficients de O et S).

2) Montrons que μ est surjective. Soit $M\in GL_n(\mathbb{R})$. Alors ${}^tMM\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (en effet ${}^tx({}^tMM)x = {}^t(Mx)Mx = \|Mx\|_2^2 \geq 0$ et ${}^tx({}^tMMx)=0 \Leftrightarrow Mx=0 \Leftrightarrow x=0$)
D'après le théorème spectral, on peut donc diagonaliser ${}^tMM$ dans une base orthonormée. Ainsi en notant $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de ${}^tMM$, il existe $P\in O_n(\mathbb{R})$, telle que ${}^tMM = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$, et puisque ${}^tMM\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\lambda_i>0$. Ainsi, on peut définir $S = P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1}$, et alors $S\in S_n(\mathbb{R})$ car $P\in O_n(\mathbb{R})$, et même $S\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ car ses valeurs propres sont strictement positives. De plus, on a $S^2={}^tMM$. On définit maintenant $O = MS^{-1}$. Alors
${}^tOO = {}^t(MS^{-1})MS^{-1} = {}^tS^{-1}\,{}^tM\,MS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$, donc $O\in O_n(\mathbb{R})$
Ainsi $M=OS$ avec $O\in O_n(\mathbb{R})$ et $S\in S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc μ est surjective.

3) Montrons que μ est injective. Supposons que l'on ait $M = OS = O'S'$ où $O'\in O_n(\mathbb{R})$ et $S'\in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On a alors $S^2 = {}^tMM = {}^tS'({}^tO'O')S' = S'^2$
Soit Q un polynôme tel que pour tout i, $Q(\lambda_i)=\sqrt{\lambda_i}$ (par exemple un polynôme interpolateur de Lagrange, quitte à renuméroter les VP, cps que $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ sont distincts et $\lambda_{r+1},\dots,\lambda_n$ apparaissent parmi celles ci, alors $Q(X) = \sum_{i=1}^{r}\sqrt{\lambda_i}\prod_{\substack{1\leq j\leq r\\ j\neq i}}\frac{X-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}$.)

Alors $S = P\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix} P^{-1} = PQ\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n\end{pmatrix} P^{-1} = Q\left(P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n\end{pmatrix} P^{-1}\right)$

$= Q(S^2) = Q(S'^2)$.

Donc S est un polynôme en S', donc commute avec S'.

Ainsi, ces matrices sont symétriques, donc diagonalisables (toujours d'après le théorème spectral) et commutent, donc elles sont codiagonalisables. Ainsi, il existe $P_0 \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que, en notant $\mu'_1, \dots, \mu'_n$ les valeurs propres de S' (toutes strictement positives puisque $S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$), on ait $S' = P_0\begin{pmatrix} \mu'_1 & & (0) \\ & \mu'_2 & \\ (0) & & \ddots \ \mu'_n\end{pmatrix} P_0^{-1}$ et $S = P_0\begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n\end{pmatrix} P_0^{-1}$ ($\mu_i = \sqrt{\lambda_{\sigma(i)}}$)

Alors $S'^2 = S^2$, ie $P_0\begin{pmatrix} \mu_1'^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n'^2\end{pmatrix} P_0^{-1} = P_0\begin{pmatrix} \mu_1^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n^2\end{pmatrix} P_0^{-1}$

et donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mu_i'^2 = \mu_i^2$, or les $\mu_i, \mu'_i \in \mathbb{R}_+^*$ comme $S, S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mu'_i = \mu_i$ et donc $S = S'$. On en déduit également $O = O'$, et donc μ est injective.

4) Montrons que μ^{-1} est continue, grâce à la caractérisation séquentielle. Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M dans $GL_n(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $(O_k, S_k) = \mu^{-1}(M_k)$, et on note de même $(O,S) = \mu^{-1}(M)$. Nous devons donc montrer que les suites $(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers O et S.

Puis $O_n(\mathbb{R})$ est compact (lemme 1), on peut donc extraire une sous-suite $(O_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une certaine matrice $\overline{O} \in O_n(\mathbb{R})$ (donc $\overline{O}$ valeur d'adhérence de la suite) Ainsi $S_{k_m} = O_{k_m}^{-1} M_{k_m}$ converge vers $\overline{O}^{-1} M =: \overline{S}$ (par continuité de $A \mapsto A^{-1}$ dans $GL_n(\mathbb{R})$).

Or $\overline{S} \in \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} \overset{\text{lemme 2}}{=} S_n^{+}(\mathbb{R})$ car $S_{k_m} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, et $\overline{S} \in GL_n(\mathbb{R})$ car O^{-1} et M sont dans $GL_n(\mathbb{R})$, donc $\overline{S} \in S_n^{+}(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R}) = S_n^{++}(\mathbb{R})$

On a donc $M = \overline{O}\,\overline{S} = OS$ donc par injectivité de μ, $\overline{O} = O$ et $\overline{S} = S$. Ainsi $(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $O_n(\mathbb{R})$ compact admettant une unique valeur d'adhérence (O) donc $(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers O (lemme 3) et on en déduit que $S_k = O_k^{-1} M_k$ converge vers S. Donc μ^{-1} est continue.

Ainsi <u>μ est un homéomorphisme</u>.

<u>Preuve du corollaire 1</u> : On rappelle la def du rayon spectral :
$\rho(M) = \max_{1\le i\le n} \{|\lambda_i|, \lambda_i \in Sp(M)\}$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on écrit $A = OS$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|OSx\|_2 = \|Sx\|_2$, donc $|||A|||_2 = |||S|||_2$. Comme S est symétrique réelle, elle est diagonalisable

dans une base orthonormée $(v_1, \dots v_n)$ d'après le théorème spectral, et on ordonne la base de sorte que les VP correspondantes soient $\lambda_1, \dots \lambda_n$, où $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$. Ainsi pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ de norme 1, on a :

$\|Sx\|_2^2 = \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i v_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leq \lambda_1^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{\|x\|_2^2 = 1} = \rho(S)^2$, ie $\|Sx\|_2 \leq \rho(S)$

et la borne est atteinte pour $x = v_1$.

Ainsi $|||S|||_2 = \rho(S)$, et finalement $|||A|||_2 = |||S|||_2 = \rho(S) = \lambda_1 = \sqrt{\lambda_1^2}$
$= \sqrt{\rho(S^2)} = \sqrt{\rho({}^tAA)}$

[Bonus]

Preuve du corollaire 2 : Soit G un groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$ et soit $g \in G$. On peut écrire $g = os$ avec $o \in O_n(\mathbb{R})$ et $s \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par hypothèse $o \in G$, donc $s = o^{-1} g \in G$ donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $s^k \in G$. Or par le thm spectral, s est diagonalisable et ses VP sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
En utilisant le corollaire 1, on sait que $|||s|||_2 = \rho(s)$, donc comme G est compact, les VP de s ne peuvent être > 1 (sinon $|||s^k|||_2$ ne serait pas bornée) ni < 1 (sinon $\|s^{-k}\|_2$ ne serait pas bornée) donc $s = Id$ et $g = o \in O_n(\mathbb{R})$.

Preuve du lemme 1 : Puisque $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, il suffit de montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné.
* $O_n(\mathbb{R})$ est fermé, car c'est l'image réciproque du fermé $\{I_n\}$ dans $M_n(\mathbb{R})$ par l'application continue $f : M \mapsto {}^tMM$.
* $O_n(\mathbb{R})$ est borné car ses éléments sont de norme 1 pour $|||\cdot|||_2$: si $M \in O_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Mx\|_2^2 = {}^t(Mx)Mx = {}^tx\,{}^tMMx = {}^txx = \|x\|_2^2 = 1$. Donc $|||M|||_2 = 1$.
Ainsi $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Preuve du lemme 2 : Montrons tout d'abord que $S_n^+(\mathbb{R})$ est fermé puis l'on procèdera par double inclusion.
* On sait que $S_n(\mathbb{R})$ est fermé car c'est un SEV de $M_n(\mathbb{R})$ de dim finie.
Soit $(S_k) \in S_n^+(\mathbb{R})$ tq $S_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} S$. Alors $S \in S_n(\mathbb{R})$ comme c'est un fermé, et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, ${}^tx S_k x \geq 0$, donc en passant à la limite ($M \mapsto {}^txMx$ continue), on en déduit que ${}^txSx \geq 0$ donc $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, qui est donc fermé.
* On obtient grâce à ce fait la 1ère inclusion : $S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset S_n^+(\mathbb{R})$, donc $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} \subset \overline{S_n^+(\mathbb{R})} = S_n^+(\mathbb{R})$ puisque $S_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.
* Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, montrons que $S \in \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$ en montrant que c'est la limite de matrices dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Toujours par thm spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) \\ (0) & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ où $\lambda_1, \dots \lambda_n \geq 0$ sont les VP de S. On pose alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
$S_k = P\begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k} & (0) \\ (0) & \lambda_n + \frac{1}{k} \end{pmatrix} P^{-1}$. Alors $S_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} S$ et $S_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc $S \in \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$.
Donc $S_n^+(\mathbb{R}) \subset \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$, et on a obtenu par double inclusion l'égalité $S_n^+(\mathbb{R}) = \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$.

Preuve du lemme 3 : Par l'absurde, supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers x son unique valeur d'adhérence. Alors $\exists \varepsilon>0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n\geq N$, $d(x_n,x)\geq\varepsilon$. On peut donc prendre φ une extractrice telle que $d(x_{\varphi(n)},x)\geq\varepsilon$. On peut extraire de la sous suite $(x_{\varphi(n)})$ une "sous sous suite" convergente puisque l'on se place dans un compact, et la limite de cette sous sous suite est donc une valeur d'adhérence différente de x ↯.

Remarques : * Par densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$, on peut étendre la décomposition polaire sur $M_n(\mathbb{R})$ (en prenant une suite $(A_k)\in GL_n(\mathbb{R})$ qui CV vers A), mais on n'a plus unicité et S n'est que dans $S_n^+(\mathbb{R})$.

* Pourquoi ce nom ? Pour $n=1$, sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})=\mathbb{R}_+^*$ et $U_n(\mathbb{C})$ représente les nombres complexes de module 1, on retrouve donc l'écriture d'un complexe non nul en polaire $z=re^{i\theta}$.

* On déduit de la preuve le résultat suivant : $\forall A\in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\exists B\in S_n^{++}(\mathbb{R}), B^2=A$ (ie il y a existence d'une racine carrée).

* le corollaire 1 reste vrai pour les matrices non inversibles, par densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$, et par continuité de ρ (cf H2G2).

* la décomposition polaire a plein d'applications, en voici quelques unes :

- Montrer la connexité par arcs de $GL_n^+(\mathbb{R})$: si $M=OS\in GL_n^+(\mathbb{R})$, on peut relier S à I_n, et O est en fait dans $SO_n(\mathbb{R})$ (connexe par arcs), donc on peut relier O à I_n, et ainsi relier M à I_n.
- Etudier le sous groupe $O(p,q)$ de $GL_{p+q}(\mathbb{R})$ formé des isométries de $q(x)=x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_{p+q}^2$ (cf H2G2) (cf H2G2)
- De façon générale, l'exp nous donne un homéo de $S_n(\mathbb{R})$ sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc $GL_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\underbrace{O_n(\mathbb{R})}_{\text{compact}}\times\underbrace{\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}}_{\text{EV de dim finie simple !}}$, et ça, ça peut être chouette pour étudier des choses de façon topologique.

* le corollaire 2 n'est qu'une petite partie d'un gros théorème : tout sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$ (mais ça c'est dur à montrer) (en version ⊕ simple il y a aussi tout sous groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$) (cf H2G2)

* La décomposition polaire permet aussi de montrer que l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme 2 ! (cf dev correspondant)