Générateurs de $GL_n(\mathbb{K})$ et $SL_n(\mathbb{K})$ et connexité

↳ <u>Refs</u> : Grand Combat p79-81 (thm), FGN Algèbre 2 p 167 (cor), Carnet de voyage p 114-115 (prop).

<u>Rappel</u> : Soit $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice de transvection de $M_n(\mathbb{K})$ est une matrice de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \lambda & & 1 \end{pmatrix}$ où $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}^\times$. On remarque que $T_{i,j}(\lambda) \in SL_n(\mathbb{K})$, que $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = -T_{i,j}(\lambda)$, et que multiplier à droite (resp à gauche) une matrice par $T_{i,j}(\lambda)$ revient à faire l'opération $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ (resp $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).
Une matrice de dilatation de $M_n(\mathbb{K})$ est une matrice de la forme $D(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$, où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$. On remarque que $D(\lambda) \in GL_n(\mathbb{K})$, que $D(\lambda)^{-1} = D(\lambda^{-1})$ et que multiplier à droite (resp à gauche) une matrice par $D(\lambda)$ revient à faire l'opération $C_n \leftarrow \lambda C_n$ (resp $L_n \leftarrow \lambda L_n$).

Théorème : (Générateurs de $GL_n(\mathbb{K})$ et $SL_n(\mathbb{K})$)

1) Toute matrice $M \in SL_n(\mathbb{K})$ est produit de matrices de transvection.

2) Toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{K})$ est produit de matrices de transvection et d'au plus une matrice de dilation.

Autrement dit, $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et les dilatations.

Corollaire : • $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs
• $GL_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes : $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$.

Proposition : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

<u>Preuve du théorème</u> : 1) Soit $M \in SL_n(\mathbb{K})$. Nous allons montrer qu'il existe des matrices de transvection $T_1, \dots, T_r, T_1', \dots, T_s'$ telles que $T_1 \cdots T_r M T_1' \cdots T_s' = I_n$, et cela suffira à montrer le premier point puisqu'alors $M = T_r^{-1} \cdots T_1^{-1} T_s'^{-1} \cdots T_1'^{-1}$ et l'inverse d'une matrice de transvection est encore une matrice de transvection. D'après les rappels, cela équivaut à dire que l'on peut passer de M à I_n via des opérations élémentaires de type $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ et $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $i \neq j$.
Pour cela, nous allons procéder par récurrence sur n.

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 1$, puisque $M \in SL_1(\mathbb{K})$, $M = I_1$ donc c'est fini.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat soit vrai pour toute matrice de $SL_n(\mathbb{K})$, et soit $M = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1, n+1]\!]} \in SL_{n+1}(\mathbb{K})$.
On va utiliser le pivot de Gauss avant de se ramener à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & M' \end{array}\right)$ pour appliquer l'hypothèse de récurrence.

Puisque M est inversible, L_1 est non nulle, donc il existe j tel que $a_{1,j} \neq 0$. Si l'on peut prendre $j=1$ super on ne touche à rien. Si $j \neq 1$ (et $a_{1,1}=0$), on effectue $C_1 \leftarrow C_1 + C_j$, et on peut donc se ramener au cas où $a_{1,1} \neq 0$.
Quitte à effectuer $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, on peut supposer $a_{2,1} \neq 0$.
Puis en faisant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + (1-a_{1,1})a_{2,1}^{-1}L_2$, on se ramène au cas où $a_{1,1}=1$.
Puis pour tout $i \in [\![2, n+1]\!]$, si $a_{i,1} \neq 0$, on effectue l'opération $L_i \leftarrow L_i - a_{i,1}L_1$, et pour tout $j \in [\![2, n+1]\!]$, si $a_{1,j} \neq 0$, on effectue l'opération $C_j \leftarrow C_j - a_{1,j}C_1$. On obtient alors une matrice diagonale par blocs $M'' = \underbrace{\tau_1 \cdots \tau_k M \tau_1' \cdots \tau_\ell'}_{\text{transvections}} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 - 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & M' \\ 0 & \end{array}\right)$.
Or faire des opérations élémentaires ne change pas le déterminant, donc M'' est de déterminant 1, et en développant p/r à la première ligne, on en déduit $\det(M')=1$, ie $M' \in SL_n(\mathbb{K})$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, il existe $P_1, \dots P_r, P_1', \dots P_s'$ matrices de transvection dans $SL_n(\mathbb{K})$ telles que $P_1 \cdots P_r M' P_1' \cdots P_s' = I_n$.
On pose alors pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $T_i = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 - 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_i \\ 0 & \end{array}\right)$ et pour tout $j \in [\![1, s]\!]$, $T_j' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 - 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_j' \\ 0 & \end{array}\right)$, qui sont des matrices de transvection de $SL_{n+1}(\mathbb{K})$ telles que (par un calcul par blocs) $T_1 \cdots T_r M'' T_1' \cdots T_s' = I_{n+1}$, et donc $T_1 \cdots T_r \tau_1 \cdots \tau_k M \tau_1' \cdots \tau_\ell' T_1' \cdots T_s' = I_{n+1}$, ce qui conclut la récurrence.

2) Soit $M \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda = \det(M)$, si $\lambda = 1$ c'est gagné d'après ce qu'il précède, sinon $M \cdot D(\lambda^{-1}) \in SL_n(\mathbb{K})$, et par le point précédent, il existe $T_1, \dots, T_r$ matrices de transvection telles que $M D(\lambda^{-1}) = T_1 \cdots T_r$ et donc $M = T_1 \cdots T_r D(\lambda)$, ce qui conclut.

<u>Preuve du corollaire</u> : • On prolonge la notation $T_{i,j}(\lambda)$ pour $\lambda = 0$ par $T_{i,j}(0) = I_n$. Soit $A \in SL_n(\mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrons que A peut être reliée à I_n via un chemin continu. D'après ce qui précède, il existe $\lambda_1, \dots \lambda_r \in \mathbb{K}^\times$ et des couples $(i_1, j_1), \dots (i_r, j_r)$ dans $[\![1, n]\!]^2$ avec $i_k \neq j_k$ tels que A soit le produit de transvections suivant : $A = \prod_{k=1}^{r} T_{i_k, j_k}(\lambda_k)$. On définit alors $\gamma : [0,1] \to SL_n(\mathbb{K})$
$$t \mapsto \prod_{k=1}^{r} T_{i_k, j_k}(t\lambda_k)$$
Ainsi, γ est bien définie, continue, $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$.
Donc $SL_n(\mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est connexe par arcs (donc connexe)

• (⚠ Sans réf, mais exactement la même idée que le premier point)

On sait déjà que $GL_n(\mathbb{R}) = GL_n^+(\mathbb{R}) \sqcup GL_n^-(\mathbb{R})$ où $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \det(M) > 0\}$ et $GL_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \det(M) < 0\}$, il reste donc à montrer la connexité (en fait la connexité par arcs) de ces deux ensembles.

▶ Soit $A \in GL_n^+(\mathbb{R})$ et $\mu = \det(A)$. D'après le théorème, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}^\times$ et des couples $(i_1, j_1), \dots, (i_r, j_r)$ dans $[\![1, n]\!]$ avec $i_k \neq j_k$ tels que $A = \prod_{k=1}^{r} T_{i_k, j_k}(\lambda_k) \times D(\mu)$. On définit alors

$$\gamma : [0,1] \to GL_n^+(\mathbb{R}), \quad t \mapsto \prod_{k=1}^{r} T_{i_k, j_k}(\lambda_k t) \times D(\underbrace{t\mu + 1 - t}_{>0})$$

(on prolonge la notation $D(\mu)$ pour $\mu = 1$ par $D(1) = I_n$)

Ainsi, γ est bien définie, continue, $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$.

Donc $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs donc connexe.

▶ De même si $A \in GL_n^-(\mathbb{R})$, on a toujours $A = \prod_{k=1}^{r} T_{i_k, j_k}(\lambda_k) \times D(\mu)$, et on va cette fois relier A à $J_n = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & -1 \end{pmatrix}$.

On définit

$$\gamma : [0,1] \to GL_n^-(\mathbb{R}), \quad t \mapsto \prod_{i=1}^{r} T_{i_k, j_k}(\lambda_k t) \times D(\overbrace{t\mu - (1-t)}^{<0})$$

Ainsi, γ est bien définie, continue, $\gamma(0) = J_n$ et $\gamma(1) = A$.

Donc $GL_n^-(\mathbb{R})$ est connexe par arcs donc connexe.

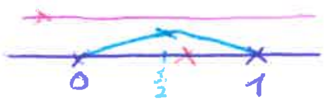
[Bonus]

<u>Preuve de la proposition</u> : Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. Nous allons relier A à B via un chemin continu dans $GL_n(\mathbb{C})$.

On définit $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \det((1-z)A + zB)$, alors φ est polynomiale en z, et ce polynôme est non nul car $\varphi(0) = \det(A) \neq 0$, ainsi l'ensemble $Z \subset \mathbb{C}$ de ses zéros est fini.

On construit alors un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ reliant 0 à 1 en évitant les éléments de Z : on prend $\alpha \in Z$ tel que $\mathrm{Im}(\alpha)$ soit minimale non nulle (possible car Z fini), si $Z \subset \mathbb{R}$, on prend $\alpha = i$. On pose alors

$$\gamma : t \mapsto \begin{cases} t + it\,\mathrm{Im}(\alpha) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ t + i(1-t)\,\mathrm{Im}(\alpha) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



fait l'affaire car $0, 1 \notin Z$ et $\forall t \in]0,1[$, $0 < \mathrm{Im}(\gamma(t)) \leq \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\alpha) < \mathrm{Im}(\alpha)$ donc $\gamma(t)$ n'est pas dans Z.

On construit alors $\psi : [0,1] \to GL_n(\mathbb{C})$, $t \mapsto (1-\gamma(t))A + \gamma(t)B$.

Ainsi ψ est bien définie par construction de γ, continue, $\psi(0) = A$ et $\psi(1) = B$.

Donc $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, donc connexe.

Remarques : * Les conditions $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$ dans les définitions respectives de matrices de transvection et de dilatation sont mises pour faire correspondre aux notions côté endomorphismes (et pour que les caractérisations associées puissent être valides sans considérer le cas de l'identité). Rappelons ces notions : E un $\mathbb{K}$-ev de dim n.

▶ $u \in \mathcal{L}(E)$ est une transvection d'hyperplan H et de droite D si $u \neq Id$, $u(x) = x$ pour tout $x \in H$, $u(x) - x \in D$ pour tout $x \in E$. On a les équivalences

u est une transvection $\Leftrightarrow$ $\dim(\mathrm{Ker}(u - Id)) = n-1$ et $(u - Id)^2 = 0$

(et alors u transv d'hyperplan $\mathrm{Ker}(u-Id)$ et de droite $\mathrm{Im}(u-Id)$)

$\Leftrightarrow$ $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0\}$, $a \in \mathrm{Ker}\,\varphi \setminus \{0\}$, $\forall x \in E$, $u(x) = x + \varphi(x) a$

(u transv d'hyperplan $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et de droite $\mathbb{K}a$)

$\Leftrightarrow$ $\exists \mathcal{B}$ base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit une mat. de transv ⊛

▶ $u \in \mathcal{L}(E)$ est une dilatation d'hyperplan H, de direction D et de rapport $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$ si $u(x) = x$ pour tout $x \in H$, $u(x) = \lambda x$ pour tout $x \in D$. On a les équivalences :

u est une dilatation $\Leftrightarrow$ $u \in GL(E)$, $\dim(\mathrm{Im}(u - Id)) = 1$ et $\mathrm{Im}(u-Id) \not\subset \mathrm{Ker}(u - Id)$

(u dil. d'hyperplan $\mathrm{Ker}(u-Id)$, de droite $\mathrm{Im}(u-Id)$ et de rapport λ tq $u(e) = \lambda e$ où $e \in D \setminus H$).

$\Leftrightarrow$ $\exists \mathcal{B}$ base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit une matrice de dilatation

Le théorème nous dit donc que les transvections engendrent $SL(E)$ et que les dilatations et transvections engendrent $GL(E)$.

⚠ La matrice d'une transvection (resp d'une dilatation) dans une base quelconque n'est pas toujours une matrice de transvection (resp dilatation)

* Le théorème nous permet de montrer que les dilatations engendrent $GL(E)$ (en montrant qu'une transvection est un produit de dilatations) (il faut en revanche pour cela que le corps ait au moins trois éléments)

* Le théorème permet de montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont engendrés par les matrices diagonalisables inversibles (dilatations sont dedans et pour les transvections $T_{i,j} = D^{-1}(DT_{i,j})$ où D est diagonale de coef non nuls tous distincts, alors D^{-1} diag et $DT_{i,j}$ triangulaire de diag égale à celle de D → diagonalisable).

* En montrant qu'une transvection peut s'écrire comme un commutateur (mais c'est hyper chiant), on peut montrer que $D(GL_n(\mathbb{K})) = SL_n(\mathbb{K})$ si $n \geq 3$ ou si $n = 2$ et $|\mathbb{K}| \geq 4$.

* Deux transvections quelconques sont semblables dans $GL_n(\mathbb{K})$, et même dans $SL_n(\mathbb{K})$ si $n \geq 3$. Deux dilatations sont semblables dans $GL_n(\mathbb{K})$ ssi elles ont le même rapport.

⊛ $\Leftrightarrow$ $\exists \mathcal{B}$ base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$