# Réduction des endomorphismes normaux

→ Ref : Rombaldi p743-745

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle .,. \rangle$. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$, où $u^*$ est l'adjoint de $u$ ie l'unique endo de $E$ tq $\forall (x,y) \in E^2, \langle x | u(y) \rangle = \langle u^*(x) | y \rangle$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

**Lemme 1 :** Il existe un SEV de $E$ stable par $u$ de dim 1 ou 2.

Supposons désormais $u$ normal.

**Lemme 2 :** Si $F$ est un SEV de $E$ stable par $u$, alors $F^\perp$ est stable par $u$

**Lemme 3 :** Il existe des SEV $P_1, \dots P_r$ de $E$ stables par $u$, de dim 1 ou 2, deux à deux orthogonaux tels que $E = \bigoplus_{1 \le i \le r} P_i$

**Lemme 4 :** Si $n = \dim(E) = 2$, alors :

* si $u$ a une valeur propre réelle, alors $u$ est diagonalisable dans une BON.
* sinon, pour toute BON $\mathcal{B}$ de $E$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

**Théorème de réduction des endomorphismes normaux :** Il existe une BON $\mathcal{B}$ de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ s'écrit par blocs :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D_p & & & & (0) \\ & R_1 & & & \\ & & R_2 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & R_r \end{pmatrix}$$

où $D_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale et $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ avec $(a_i, b_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, et $p, r$ sont des entiers tels que $p + 2r = n$.

**Preuve du lemme 1 :** Si $u$ admet une valeur propre réelle $\lambda$, alors pour tout vecteur propre associé $x \in E \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}x$ est un sous espace de dimension 1 stable par $u$. Sinon le polynôme minimal $\pi_u$ se décompose dans $\mathbb{R}[X]$ (anneau factoriel) en produit de facteurs irréductibles de degré 2 (car si $\pi_u(\lambda) = 0$, alors $\pi_u(\overline{\lambda}) = 0$ puisque $E$ est réel, $\pi_u \in \mathbb{R}[X]$). Le polynôme $\pi_u$ s'écrit donc $\pi_u(X) = (X^2 + bX + c) Q(X)$ avec $b^2 - 4c < 0$ et $Q(u) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ par minimalité de $\pi_u$. On déduit de l'égalité $0_{\mathcal{L}(E)} = \pi_u(u) = (u^2 + bu + c\,\mathrm{Id}) \circ Q(u)$ que $u^2 + bu + c\,\mathrm{Id}$ n'est pas injectif, ie son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^2 + bu + c\,\mathrm{Id}) \setminus \{0\}$, on définit $P = \mathrm{Vect}\{x, u(x)\}$ est un SEV de dim 2 stable par $u$ : de dim 2 car $x$ n'est pas vecteur propre*, et stable car la relation $u^2(x) + bu(x) + cx = 0$ implique $u^2(x)$ est dans $P$.

* sinon $(x, u(x))$ serait lié et $x \neq 0$ donc $x$ serait un vecteur propre. / ** et donc $\dim E \geq 2$

**Preuve du lemme 2 :** Si $F=\{0\}$ ou $F=E$, alors $F^\perp=E$ ou $F^\perp=\{0\}$ et cet espace est stable par $u$. On suppose donc $(n\geq 2)$ $1\leq \dim(F)\leq n-1$. Comme $F$ est stable par $u$, dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $E=F\oplus F^\perp$, la matrice de $u$ est de la forme $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3\end{pmatrix}$ et celle de $u^*$ est ${}^tA=\begin{pmatrix} {}^tA_1 & 0 \\ {}^tA_2 & {}^tA_3\end{pmatrix}$ (on voit $F^\perp$ stable par $u^*$). Pour $u$ normal, on a $A{}^tA={}^tAA$ ie

$$\begin{pmatrix} A_1{}^tA_1+A_2{}^tA_2 & * \\ * & * \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {}^tA_1A_1 & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

De là $Tr(A_2{}^tA_2)=0$ (car $A_1{}^tA_1+A_2{}^tA_2={}^tA_1A_1$ mais $Tr(A_1{}^tA_1)=Tr({}^tA_1A_1)$)

Comme $(A,B)\longmapsto Tr(A^tB)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$ (c'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$), on en déduit $A_2=0$ et donc $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3\end{pmatrix}$ et $F^\perp$ est stable par $u$.

**Preuve du lemme 3 :** On procède par récurrence sur $n=\dim(E)\geq 1$ :

* Pour $n=1$ ou $2$, c'est immédiat.
* Soit $n\geq 2$, supposons le résultat prouvé pour tout endo normal sur un EV euclidien de dim $\leq n$. Supposons $\dim(E)=n+1$. D'après le lemme 1, il existe un sous espace $P_1$ de $E$ de dim 1 ou 2 stable par $u$. D'après le lemme 2, $P_1^\perp$ est stable par $u$ : on dispose donc de l'endo $u_1$ induit par $u$ sur $P_1^\perp$ ($u_1$ est normal car $u$ l'est). Comme $\dim(P_1^\perp)=n+1-\dim(P_1)\in[\![1,n]\!]$, par hypothèse de récurrence, il existe des sous espaces $P_2,\ldots,P_r$ de $P_1^\perp$ tq $P_1^\perp=\overset{\perp}{\bigoplus}_{2\leq i\leq r} P_i$ et comme $E=P_1\overset{\perp}{\oplus}P_1^\perp$, a fortiori $E=\overset{\perp}{\bigoplus}_{1\leq i\leq r} P_i$ et les $P_i$ pour $i\in[\![2,r]\!]$ sont stables par $u_1$ donc par $u$.

**Preuve du lemme 4 :** * Si $u$ a une valeur propre réelle $\lambda_1$, il existe alors un vecteur unitaire $e_1$ tq $u(e_1)=\lambda_1 e_1$, et $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par $u$ d'après le lemme 2, et $\dim((\mathbb{R}e_1)^\perp)=1$, donc $u$ induit une homothétie sur $(\mathbb{R}e_1)^\perp$. Il existe donc $\lambda_2\in\mathbb{R}$ et $e_2$ vecteur unitaire orthogonal à $e_1$ tq $u(e_2)=\lambda_2 e_2$.
Ainsi $Mat_{(e_1,e_2)}(u)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ dans la BON $(e_1,e_2)$.

* Si $u$ n'a pas de valeur propre réelle. Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ la matrice de $u$ dans une BON qcq. Comme $u$ est normal, on a ${}^tAA=A{}^tA$ et donc :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2\end{pmatrix}$$

Cela nous donne $a^2+c^2=a^2+b^2$ donc $c=\pm b$ et $ac+bd=ab+cd$ donc $(a-d)(b-c)=0$ donc $d=a$ ou $c=b$.

Si $b=0$, alors $c=0$ et $A$ est diagonale, contredit l'hyp "A sans valeur propre réelle". On a donc $b\neq 0$. Si $b=c$, $A$ est symétrique et $\chi_A=X^2-(a+d)X+ad-b^2$ et $\Delta=(a+d)^2-4(ad-b^2)=(a-d)^2+4b^2\geq 0 \Rightarrow \chi_A$ a 2 racines réelles ($\neq$ ou $=$), ce qui contredit de nouveau l'hypothèse "A sans valeur propre réelle" donc $b=-c\neq 0$ et $a=d$ ie $A=\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a\end{pmatrix}$.

Preuve du théorème : Nous allons désormais rassembler les lemmes précédents pour obtenir le résultat :
Tout d'abord, d'après le lemme 3, on sait que l'on peut décomposer $E$ comme somme de SEV stables par $u$, 2 à 2 orthogonaux, de dim 1 ou 2 : $E = \overset{\perp}{\underset{1 \leq i \leq r}{\bigoplus}} P_i$.

Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, • soit $P_i$ est de dimension 1, alors $u_{P_i}$ est forcément diagonale dans toute BON $\mathcal{B}_i (= \{e_i\})$ de $P_i$, on en choisit une.
• soit $P_i$ est de dimension 2, et d'après le lemme 4, on peut trouver une BON $\mathcal{B}_i$ telle que $Mat_{\mathcal{B}_i}(u_{P_i})$ soit : soit diagonale, soit de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
Ainsi en concaténant les bases $\mathcal{B}_i$ obtenues, et en "réorganisant" en mettant d'abord les $P_i$ de dimension 1, puis ceux sur lesquels $u$ est diagonale, et enfin les autres, on obtient bien $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D_p & & & (0) \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R_r \end{pmatrix}$

Remarques : * Dans le cas d'un espace hermitien, on peut montrer que $u$ est normal ssi $u$ est diagonalisable en BON (cf Gourdon, Algèbre).
* Les endos symétriques sont en particulier des endos normaux donc ce théorème permet de retrouver le théorème spectral (réel). Il permet également de réduire les endos anti-symétriques et orthogonaux.