

Transformée de Fourier de la Gaussienne

CloudSea

Cadre

On prend la convention habituelle $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$

Soit $a > 0$ et $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$, on montre que $\widehat{\gamma}_a(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

Recasages :

- [[236 Calcul d'intégrales]]
- [[250 Transformée de Fourier]]

Backup

- [[239 Intégrales à paramètre]] éventuellement pour illustrer Fourier
- [[245 Analyse complexe]] a mettre pour illustrer le théorème des résidus

Référence : El Amrani

Déroulé du développement

Montrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Le changement de variable polaire donne $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$

Donc son jacobien donne

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ar^2} r dr d\theta \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{2a} e^{-ar^2} \right]_0^{+\infty} \\
&= 2\pi \frac{1}{2a} \\
&= \frac{\pi}{a}
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien le résultat

Montrer l'égalité attendue

Faire une réduction de gauss dans l'exponentielle pour sortir $e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

On a

$$\widehat{\gamma}_a(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-ax^2 - ix\xi) dx$$

En écrivant

$$ax^2 + ix\xi = a \left(x^2 + \frac{ix\xi}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{i\xi}{2a} \right)^2 + \frac{\xi^2}{4a} \right)$$

On obtient donc

$$\widehat{\gamma}_a(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-a \left(x + \frac{i\xi}{2a} \right)^2 \right) dx$$

Appliquer un théorème des résidus à e^{-az^2} sur un rectangle bien choisi

Pour $R > 0$, on considère la fonction entière $z \mapsto e^{-az^2}$ et le carré $\Gamma(R)$ reliant $-R$, R , $R + \frac{i\xi}{2a}$ et $-R + \frac{i\xi}{2a}$. Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, on a

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Gamma(R)} e^{-az^2} dz \\
&= \int_{-R}^R e^{-at^2} dt + \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R+it)^2} i dt - \int_{-R}^R e^{-a\left(t+\frac{i\xi}{2a}\right)^2} dt - \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(-R+it)^2} i dt \\
&= I_1(R) + I_2(R) - I_3(R) - I_4(R)
\end{aligned}$$

Faire un passage à la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et conclure

Quand $R \rightarrow +\infty$, on a

$$\begin{aligned}
I_1(R) &\rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
I_2(R) &\rightarrow 0 \\
I_3(R) &\rightarrow e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \hat{\gamma}_a(\xi) \\
I_4(R) &\rightarrow 0
\end{aligned}$$

Donc on obtient bien

$$\hat{\gamma}_a(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

Version révisions

On prend la convention habituelle $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$

Soit $a > 0$ et $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$, on se propose de montrer que $\hat{\gamma}_a(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

1. Montrer que le Jacobien du changement de variable polaire vaut r
2. A l'aide d'un changement de variable polaire, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

2. Montrer que

$$\widehat{\gamma}_a(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-az^2) \, dx$$

où z est un complexe que l'on déterminera

3. Appliquer le théorème des résidus à la fonction $z \mapsto e^{-az^2}$ sur le rectangle $-R, R, R + \frac{i\xi}{2a}, -R + \frac{i\xi}{2a}$

4. Faire tendre R vers $+\infty$ et conclure