

Théorème de Weierstrass convolutif

CloudSea

Cadre

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues à support compact

On montre si (χ_n) est une approximation de l'unité, alors pour tout $f \in E$, $f * \chi_n$ converge uniformément vers f

On en déduit le théorème de Weierstrass

Recasages :

- [[201 Espaces de fonctions]]
- [[209 Approximations de fonctions]]
- [[228 Continuité et dérivabilité]]
- [[234 Intégrale de Lebesgue]]
- [[239 Intégrales à paramètre]]
- [[241 Suites et séries de fonctions]]

Backup

- [[203 Compacité]] a mettre dans le plan au moment de parler des fonctions à support compact, et à faire en dev si on se sent pas de faire Hutchinson le jour j (ce qui n'arrivera pas)

Référence : Gourdon analyse

Déroulé du développement

Montrer que $f * \chi_n$ converge uniformément vers f

Soit $\varepsilon > 0$

Par théorème de Heine, f est uniformément continue, on a donc on a $\eta > 0$ tel que $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Pour n assez grand, on a $\int_{|t| \geq \eta} \chi_n(t) dt \leq \varepsilon$, donc pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
|f * \chi_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\chi_n(t) \, dt - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-t) - f(x))\chi_n(t) \, dt \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(x)|\chi_n(t) \, dt \\
&= \int_{|t| \leq \eta} |f(x-t) - f(x)|\chi_n(t) \, dt + \int_{|t| \geq \eta} |f(x-t) - f(x)|\chi_n(t) \, dt \\
&\leq \varepsilon + 2\|f\|_{\infty}\varepsilon
\end{aligned}$$

Donc on a bien convergence uniforme

Soient $a_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n \, dt$ **et** $p_n(t) = \frac{1}{a_n}(1-t^2)^n \chi_{|t| \leq 1}$

Montrer que p_n **est une approximation de l'unité**

Déjà p_n est bien une fonction positive continue à support compact

Ensuite on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t) \, dt = \frac{1}{a_n} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n \, dt = \frac{a_n}{a_n} = 1$$

Soit $\alpha > 0$. Si $\alpha \geq 1$ on a $|t| \geq \alpha \Rightarrow p_n(t) = 0$ donc $\int_{|t| \geq \alpha} p_n(t) \, dt = 0$

Sinon on a

$$\begin{aligned}
\int_{|t| \geq \alpha} p_n(t) \, dt &= \frac{2}{a_n} \int_{\alpha}^{+\infty} p_n(t) \, dt \\
&= \frac{2}{a_n} \int_{\alpha}^1 (1-t^2)^n \, dt \\
&\leq \frac{2}{a_n} (1-\alpha^2)^n
\end{aligned}$$

Or

$$a_n = 2 \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt \geq - \int_0^1 -2t(1-t^2)^n \, dt = - \left[\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Donc

$$\int_{|t| \geq \alpha} p_n(t) \leq 2(n+1)(1-\alpha^2)^n \rightarrow 0$$

Donc (p_n) est bien une approximation de l'unité

Montrer que si f est nulle en dehors de $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ alors $f * p_n$ est polynomiale

Pour $x \in I$ on a

$$f * p_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} p_n(x-t) f(t) \, dt$$

Or pour $x, t \in I$ on a $|x-t| \leq 1$ donc

$$p_n(x-t) = \frac{1}{a_n} (1 - (x-t)^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} q_k(t) x^k$$

Et donc

$$f * p_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{-1/2}^{1/2} q_k(t) f(t) \, dt \right) x^k$$

est bien un polynôme en x

En déduire Weierstrass

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on prolonge f en une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}$ dont le support est $[c, d] \supseteq [a, b]$

Avec un changement de variable affine, on peut se ramener au cas $[c, d] = I$ et appliquer ce qui précède

Détail de certains points

Détailler la fin

Soit $\varphi : I \rightarrow [c, d]$ la fonction affine qui interpole les extrémités des segments

Soit $g(x) = f(\varphi(x))$ de sorte que g soit définie sur I

On peut appliquer ce qui précède à g , on obtient une suite de polynômes Q_n qui converge uniformément vers g . Soit $P_n(x) = Q_n(\varphi^{-1}(x))$ défini sur $[c, d]$

On a alors

$$\begin{aligned}\|P_n - f\|_\infty &= \sup_{x \in [c, d]} (|P_n(x) - f(x)|) \\ &= \sup_{x \in I} |P_n(\varphi(x)) - f(\varphi(x))| \\ &= \sup_{x \in I} |Q_n(x) - g(x)| \\ &= \|Q_n - g\|_\infty \\ &\rightarrow 0\end{aligned}$$

Donc f est bien limite uniforme d'une suite de polynômes

Version révisions

On se propose de montrer le théorème de Weierstrass

1. Soit χ_n une approximation de l'unité et f continue à support compact, montrer que $f * \chi_n$ converge uniformément vers f

Soient $a_n = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt$ et $p_n(t) = \frac{1}{a_n}(1 - t^2)^n \chi_{|t| \leq 1}$

2. Montrer que p_n est une approximation de l'unité
3. Montrer que si f est nulle en dehors de $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ alors $f * p_n$ est polynomiale
4. En déduire le théorème de Weierstrass