Références :
Analyse pour l'agrégation, Claude Zuily On va s'intéresser à l'équation différentielle suivante

$$(E) : y'' + qy = 0 \text{ où } q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est continue, } \pi\text{-périodique et paire}$$

Notons W l'ensemble des solutions complexes de (E). On a $W \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Soit (y_1, y_2) la base canonique de solutions associée à $x_0 = 0$ ie $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ et $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$.
Soit $A : W \to W$ l'endomorphisme défini par $Ay(x) = y(x + \pi)$. (A envoie bien W sur W car q est π-périodique.) La matrice de A dans la base (y_1, y_2), encore notée A est

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$$

En effet, $Ay_1(x) = y_1(x + \pi) = ay_1(x) + by_2(x)$. On a aussi, en dérivant, $y_1'(x + \pi) = ay_1'(x) + by_2'(x)$. En faisant $x = 0$ dans la première équation, puis dans la seconde, on obtient $a = y_1(\pi)$ et $b = y_1'(\pi)$; de même $c = y_2(\pi)$ et $d = y_2'(\pi)$. On posera aussi

$$T = tr(A) = a + d = y_1(\pi) + y_2'(\pi).$$

Prop.

(i) y_1 *est paire et* y_2 *est impaire et* $\det(A) = 1$.

(ii) $a = d$ *ie* $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$.

Démonstration. Soit $z(x) = y_1(-x)$. On a

$$z''(x) + q(x)z(x) = y_1''(-x) + q(-x)y_1(-x) = 0$$

(on a utilisé la parité de q). D'autre part, $z(0) = y_1(0) = 1$ et $z'(0) = -y_1'(0) = 0 = y_1'(0)$. On a donc $z = y_1$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. Ainsi, y_1 est pair. On montre de même que y_2 est impair à l'aide de la fonction $-y_2(-x)$. Considérons le wronskien de y_1 et de y_2, on a donc

$$w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

et

$$w' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = -qy_1y_2 + qy_1y_2 = 0$$

donc w est constant et vaut $w(0) = 1$ et donc

$$\det(A) = w(\pi) = 0.$$

D'autre part, l'endomorphisme inverse de A est donné par $A^{-1}y(x) = y(x - \pi)$ et sa matrice sur (y_1, y_2) :

$$A = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$$

Le théorème de Cayley Hamilton nous permet d'affirmer que

$$\chi_A(A) = 0 = A^2 - Tr(A)A + I_2$$

d'où $A + A^{-1} = Tr(A)I_2$. On a donc

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d & 0 \\ 0 & a + d \end{pmatrix}$$

□

Prop. *(i)* $|T| < 2$ *entraîne que toutes les solutions sont bornées.*

(ii) $|T| = 2$ *entraîne que l'équation possède une solution non nulle bornée.*

(iii) $|T| = 2 \Leftrightarrow bc = 0$.

(iv) $|T| > 2$ *entraîne que toutes les solutions non nulles de l'équation sont non bornées.*

Démonstration.

(i) Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - TX + 1 = 0$.
Si $T < 2$, il a deux racines complexes conjuguées distinctes ρ et $\overline{\rho}$, de module 1 puisque $\rho\overline{\rho} = 1 = |\rho|^2$ (relation coefficient/racine). Soit (u_1, u_2) une base de W formée de vecteurs propres de A. On a

$$\begin{aligned} u_1(x+\pi) &= \rho u_1(x) \\ u_2(x+\pi) &= \overline{\rho} u_2(x) \\ |u_j(x+\pi)| &= |u_j(x)| \text{ avec j=1 ou 2} \end{aligned}$$

Comme $|u_1|$ et $|u_2|$ sont continues et π-périodiques, elles sont alors bornées. Toute solution u de l'équation, s'écrit $\alpha u_1 + \beta u_2$, où α, β sont des constantes, donc est bornée.

(ii) Si $T = \pm 2$, le polynôme caractéristique possède une racine double α vérifiant $\alpha^2 = 1$. L'équation possède donc une solution non nulle u telle que $u(x+\pi) = \pm u(x)$, u est bornée comme ce qui précède.

(iii) On réutilise le calcul fait dans la démonstration de la première proposition.

$$T = \pm 2 \Leftrightarrow a + d = \pm 2 \Leftrightarrow a = d = 2 \Leftrightarrow bc = 0 \text{ car } \det(A) = 1$$

(iv) Si $|T| > 2$, les valeurs propres de A sont ρ et ρ^{-1}, avec $\rho \in \mathbb{R}$ et $|\rho| > 1$. Soit u_1 et u_2 des fonctions propres associées respectivement à ρ et à ρ^{-1}. Soit y une solution non nulle de (E) alors $y = \alpha u_1 + \beta u_2$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.
Si $\alpha \neq 0$, soit x tel que $u_1(x) \neq 0$, $y(x+n\pi) = \alpha\rho^n u_1(x) + \beta\rho^{-1} u_2(x)$ qui est équivalent à $\alpha\rho^n u_1(x)$ quand n tend vers $+\infty$ donc y n'y est pas bornée.
Si $\alpha = 0$ alors $\beta \neq 0$, soit x tel que $u_2(x) \neq 0$, $y(x+n\pi) = \beta\rho^{-n} u_2(x)$ qui n'est pas bornée quand n tend vers $-\infty$. $\square$