

Théorème de Sylow

CloudSea

Cadre

Soit G un groupe fini de cardinal n et p un diviseur premier de n , on montre que G admet un p -Sylow

Si le temps on montre le 2e théorème de Sylow :

1. Tout p -sous groupe H est inclus dans un p -Sylow
2. Les p -Sylow sont conjugués
3. le nombre n_p de p -Sylow vérifie $n_p \equiv 1[p]$

Recasages :

- [[101 Actions de groupe]]
- [[103 Conjugaison et groupes quotients]]
- [[104 Groupes finis]]
- [[121 Nombres premiers]]

Backup

- [[123 Corps finis]] a mettre dans la partie dénombrement mais pas faire un DEV

Référence : Perrin

Déroulé du développement

Montrer que si G admet un p -Sylow S et si H est un sous groupe de G , alors il existe $a \in G$ tel que $aSa^{-1} \cap H$ est un p -Sylow de H

On considère l'action de G sur G/S par translation

H agit alors lui aussi sur G/S , et les $aSa^{-1} \cap H$ sont alors les stabilisateurs des $aS \in G/S$
Ce sont bien des p -groupes, montrons que l'un d'entre eux au moins est un p -Sylow

$aSa^{-1} \cap H$ est un p -Sylow ssi p ne divise pas $\frac{|H|}{|aSa^{-1} \cap H|}$

Pour tout a , le cardinal de $H/(aSa^{-1} \cap H)$ vaut le cardinal de l'orbite de aS , donc

$$\frac{|H|}{|aSa^{-1} \cap H|} = |\omega(aS)|$$

Or si p divise le cardinal de toutes les orbites, il divise leur somme, donc divise $|G/S| = \frac{|G|}{|S|}$
ce qui est exclus car S est un p -Sylow

Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ admet un p -Sylow

Note : a bien détailler si on est dans la leçon dénombrement

Déjà on montre que $|\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)| = (p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1})$ en comptant les bases de $\mathbb{F}_p$
Donc

$$v_p(|\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)|) = \sum_{k=0}^{n-1} v_p(p^n - p^k) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

On cherche donc un sous groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ d'ordre $p^{n(n-1)/2}$

Il suffit de prendre le sous groupe des matrices triangulaires sup avec que des 1 sur la diagonale

Conclure

Soit G un groupe fini de cardinal n et p un diviseur premier de n

Par théorème de Cayley G est un sous groupe de S_n , donc par l'injection $\sigma \mapsto P_\sigma$ c'est un sous groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, donc G admet un p -Sylow

2e théorème de Sylow si le temps

1. Soit H un p sous groupe de G et S un p -Sylow de G , on a vu qu'il existe a tel que $aSa^{-1} \cap H$ est un p -Sylow de H , donc $aSa^{-1} \cap H = H$ et donc aSa^{-1} est bien un p -Sylow qui contient H

2. Le même raisonnement appliqué au cas où H est un p -Sylow donne $aSa^{-1} = H$

3. On considère l'action de G sur l'ensemble X de ses p -Sylow par conjugaison

Soit S un p -Sylow, il agit aussi sur X par conjugaison, sauf que lui c'est un p -groupe, donc on a

$$|X| \equiv |X^S| \pmod{p}$$

Reste à montrer que X^S est réduit à un élément

X^S contient déjà S

Et si T est un autre p -Sylow normalisé par S , alors on considère $N = \langle S, T \rangle$ de sorte que T soit distingué dans N . S et T sont deux p -Sylow de N , ils sont donc conjugués, donc on a $a \in N$ tel que $S = aTa^{-1} = T$

Détail de certains points

Détailler $|X| \equiv |X^G| \pmod{p}$ quand G est un p -groupe

L'équation aux classes donne

$$|X| = |X^G| + \sum_{x \notin X^G} |\omega(x)|$$

Or $|\omega(x)|$ doit diviser l'ordre de G donc tous les éléments de la somme sont multiples de p (c'est même des puissances de p)

Donc on a bien $|X| \equiv |X^G| \pmod{p}$

Montrer que si S est un p -Sylow distingué dans G alors c'est l'unique p -Sylow de G

Soit T un autre p -Sylow, il est conjugué à T , donc on a a tel que $T = aSa^{-1} = S$

Version révisions

On se propose de montrer les théorèmes de Sylow

thm 1 : Soit G un groupe fini de cardinal n et p un diviseur premier de n , on montre que G admet un p -Sylow

thm 2 :

1. Tout p -sous groupe H est inclus dans un p -Sylow
2. Les p -Sylow sont conjugués
3. le nombre n_p de p -Sylow vérifie $n_p \equiv 1 \pmod{p}$

Montrons le thm 1

Soit G qui admet un p -Sylow S et H un sous groupe de G

1. Montrer que H agit sur G/S par translation et que le stabilisateur de aS est $aSa^{-1} \cap H$
2. Montrer que p ne peut pas diviser tous les $\frac{|H|}{|aSa^{-1} \cap H|}$
3. En déduire que H admet un p -Sylow
4. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ admet un p -Sylow
5. Soit G un groupe fini, plonger G dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ et en déduire que G admet un p -Sylow

Montrons maintenant le thm 2

6. Montrer l'item 1. en réutilisant le résultat de la question 3.
7. Montrer l'item 2. en appliquant le 1. au cas où H est un p -Sylow
8. Montrons l'item 3.
 - 8.1 Soit S un p -Sylow, en considérant son action par conjugaison sur l'ensemble X des p -Sylow, montrer que $|X| \equiv |X^S| \pmod{p}$
 - 8.2 Justifier que X^S contient S
 - 8.3 Soit T un autre élément de X^S , en considérant $N = \langle S, T \rangle$, montrer que S et T sont conjugués et en déduire que $S = T$
 - 8.4 Conclure