

Théorème des extréma liés

CloudSea

Cadre

Soient $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et soit $X \subseteq U$ le lieu des zéros de l'équations $g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0$

On suppose qu'en un certain $a \in X$ la famille $(\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_p(a))$ est libre

On montre que si la restriction de f à X admet un extremum local en $a \in X$, alors $\nabla f(a) \in \text{Vect}(\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_p(a))$

Recasages :

- [[206 Dimension finie en analyse]]
- [[214 Théorème d'inversion locale]]
- [[215 Calcul différentiel]]
- [[219 Extremums]]

Référence : Lafontaine introduction aux variétés différentielles

Déroulé du développement

Dans toute la suite on pose $d = n - p$

Montrer que $g = (g_1, \dots, g_p)$ est une submersion au voisinage de a

Soit $a \in \mathbb{R}^n$, les lignes de la jacobienne $J_g(a)$ sont les $\nabla g_i(a)$. Donc $x \in \ker(J_g(a))$ ssi x est orthogonal à tous les $\nabla g_i(a)$. Donc $\ker(J_g(a))$ est l'orthogonal de $\text{Vect}(\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_p(a))$, qui est de dimension p par hypothèse. donc $\ker(J_g(a))$ est de dimension d , donc par théorème du rang, $\text{Im}(J_g(a))$ est de dimension p

Comme c'est une condition ouverte, g est bien une submersion au voisinage de a

Donc quitte à ce restreindre à un voisinage de a X est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d

Montrer que $T_a(X)$ est un sous espace vectoriel de dimension d

Soit $\varphi : U \rightarrow V$ le difféo de la définition des sous variétés, on va montrer que $D\varphi(a)^{-1}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ dans $T_a(X)$

Pour $x \in \mathbb{R}^d \times \{0\}$, soit ε assez petit pour que $|t| < \varepsilon \Rightarrow tx \in V$. $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$, $t \mapsto \varphi^{-1}(tx)$ est un chemin de X tel que $\gamma(0) = a$, donc $\gamma'(0) = D\varphi(a)^{-1}(x) \in T_a(S)$. Donc $D\varphi(a)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) \subseteq T_a(X)$

Et réciproquement si $v \in T_a(X)$, soit γ un comme dans la définition de l'espace tangent et $\delta = \varphi \circ \gamma$. δ est un chemin de $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ donc δ' est aussi à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \{0\}$. Or $\delta'(0) = D\varphi(\gamma(0))(\gamma'(0)) = D\varphi(a)(v)$, donc $D\varphi(a)(v) \in \mathbb{R}^d \times \{0\}$, donc $v \in D\varphi(a)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$

Donc $D\varphi(a)$ est bien un isomorphisme de $T_a(X)$ dans $\mathbb{R}^d \times \{0\}$, donc $T_a(X)$ est bien un sous espace vectoriel de dimension d

Montrer que $\nabla f(a)$ est orthogonal à $T_a(X)$

Soit $\varphi : U \rightarrow V$ le difféo de la définition des sous variétés et $h : V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f|_X(\varphi^{-1}(x)) = f(\varphi^{-1}(x))$. $f|_X$ admet un extremum local en a , donc comme φ est un difféo, il conserve les voisinages, donc h admet un extremum local en 0. Donc 0 est un point critique de h , donc $Dh(0) = 0$ (en effet, quand on est à valeurs dans $\mathbb{R}$, être non inversible ça veut dire être nul)

Soit $v \in T_a(S)$, on a vu qu'il existe $x \in \mathbb{R}^d \times \{0\}$ tel que $v = D\varphi(a)^{-1}(x)$, donc

$$v \cdot \nabla f(a) = Df(a)(v) = Df(a)(D\varphi(a)^{-1}(x)) = Df(\varphi^{-1}(0))(D(\varphi^{-1})(0)(x)) = Dh(0)(x) = 0$$

Montrer que $T_a(X) = \{\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_p(a)\}^\perp$

Notons $T = \{\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_p(a)\}^\perp$

Soit $v = \gamma'(0) \in T_a(S)$ et $1 \leq i \leq p$

Soit $h_i = g_i \circ \gamma$, γ est un chemin de X , donc $h_i = 0$, donc $h'_i = 0$. Donc

$$v \cdot \nabla g_i(a) = Dg_i(a)(v) = Dg_i(\gamma(0))(\gamma'(0)) = h'_i(0) = 0$$

Donc on a bien $v \perp \nabla g_i(a)$, ce qui donne l'inclusion $T_a(X) \subseteq T$

Or les $\nabla g_i(a)$ forment une famille libre, donc T est de codimension p , donc de dimension d . Donc on a bien $T_a(X) = T$

Conclure

$\nabla f(a)$ est donc orthogonal à $\{\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_p(a)\}^\perp$, donc est bien combinaison linéaire des $\nabla g_i(a)$

Détail de certains points

Montrer le théorème de la submersion

$Dg(x)$ est surjective, donc $(Dg(x)(e_1), \dots, Dg(x)(e_n))$ est génératrice, donc quitte à changer de base en permutant les vecteurs de la canonique, on peut supposer que la famille $(Dg(x)(e_{d+1}), \dots, Dg(x)(e_n))$ est génératrice

On pose alors $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ le prolongement de g à $\mathbb{R}^n$ par l'identité. Dit autrement $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_d, g_1(x), \dots, g_{n-d}(x))$

Donc pour $x \in \Omega$, la matrice de $D\varphi(x)$ s'écrit donc $\begin{pmatrix} I_d & 0 \\ J_g(x) \end{pmatrix}$. Le déterminant par bloc donne donc $\det(D\varphi(x)) \neq 0$, donc $D\varphi(x)$ est bijective

Donc pour $a \in S$, $D\varphi(a)$ est bijective, donc par théorème d'inversion locale, on a deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ tels que U contient a et φ est un difféo de U dans V . Quitte à remplacer φ par $x \mapsto \varphi(x) - \varphi(a)$, on suppose que $\varphi(a) = 0$. Et pour $x \in U$, on a $\varphi(x) \in \mathbb{R}^d \times \{0\}$ ssi $g_1(x) = \dots = g_{n-d}(x) = 0$ ssi $x \in S$. Donc on a bien $\varphi(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$, donc S est bien une sous variété

Mais du coup là on a supposé Dg surjective seulement au point a !

Ouais mais comme g est C^1 elle est automatiquement surjective sur un voisinage de a . Pour le prouver il suffit de montrer que l'ensemble des matrices surjectives est un ouvert, or c'est l'image réciproque de l'application qui à M associe

Détailler la dernière étape

$\nabla f(a)$ est orthogonal à $\{\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_p(a)\}^\perp$, donc à $\text{Vect}(\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_p(a))^\perp$. Donc $\nabla f(a) \in \text{Vect}(\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_p(a))^{\perp\perp} = \text{Vect}(\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_p(a))$, donc $\nabla f(a)$ est bien combinaison linéaire des $\nabla g_i(a)$

Version révisions

Soient $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et soit $X \subseteq U$ le lieu des zéros de l'équations $g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0$

On se propose de montrer que si la restriction de f à X admet un extremum local en $a \in X$, et que la famille des $\nabla g_i(a)$ est libre, alors $\nabla f(a) \in \text{Vect}(\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_p(a))$

Dans toute la suite, on pose $d = n - p$

Soit $g = (g_1, \dots, g_p)$

1. Montrer que $Dg(a)$ est surjective
2. En déduire que X est une sous variété au voisinage de a
3. Soit φ le difféo issu du fait que X est une sous variété et $T_a(X)$ l'espace tangent
 - 3.1 Montrer que $D\varphi(a)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = T_a(X)$
 - 3.2 En déduire que $T_a(X)$ est un ev de dimension d
4. En considérant $h : V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f|_X(\varphi^{-1}(x)) = f(\varphi^{-1}(x))$, montrer que $\nabla f(a)$ est orthogonal à $T_a(X)$
5. Montrer que $T_a(X) = \{\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_p(a)\}^\perp$
6. Conclure