

Théorème de Kakutani

CloudSea

Cadre

Soit E un espace euclidien et G un sous groupe compact de $GL(E)$. Soit K un compact convexe non vide de E stable par tout $u \in G$, alors il existe $a \in K$ tel que $\forall u \in G, u(a) = a$

Corollaire si le temps : Tout sous groupe compact de $GL(E)$ est conjugué à un sous groupe de $O(E)$

Recasages :

- [[181 Convexité dans $\mathbb{R}^n$]]
- [[208 Espaces vectoriels normés]]

Backup :

- [[106 Groupe linéaire]] à mettre dans le plan mais pas faire de DEV

Référence : Rombaldi algèbre

Déroulé du développement

Montrer que $N(x) = \sup_{u \in G} \|u(x)\|$ est une norme stt convexe sur E (i.e. $N(x+y) = N(x) + N(y) \Rightarrow x$ et y sont positivement liés)

Pour $x \in E$, $u \mapsto \|u(x)\|$ est continue, donc il existe $u_x \in G$ tel que $N(x) = \|u_x(x)\|$

Si $N(x) = 0$, on a $u_x(x) = 0$, donc $x = 0$ car u est un automorphisme
Et l'homogénéité et l'IT découlent directement des propriétés du sup

Soit $x, y \in E$ tels que $N(x+y) = N(x) + N(y)$ et $u = u_{x+y}$

On a

$$\|u(x)\| + \|u(y)\| \leq N(x) + N(y) = N(x+y) = \|u(x+y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\|$$

Donc $\|u(x+y)\| = \|u(x)\| + \|u(y)\|$ et donc comme une norme euclidienne est strictement

convexe, $u(x)$ et $u(y)$ sont positivement liés. Donc en composant par u^{-1} on voit que x et y sont positivement liés

Montrer qu'il existe un unique $a \in K$ tel que $N(a) = \inf_{x \in K} N(x)$

Déjà a existe par continuité de N et compacité de a

Soit $b \in K$ qui minimise $N(x)$ et $c = \frac{a+b}{2}$, on a $c \in K$ et

$$N(c) = N\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq N(a) = \frac{N(a) + N(b)}{2}$$

Donc $N(a) + N(b) = N(a+b)$, donc a et b sont positivement liés, donc on a $\lambda > 0$ tel $a = \lambda b$, donc $N(a) = N(b)$ donne $\lambda N(b) = N(b)$ donc $\lambda = 1$ et donc $a = b$

Montrer que a est le point fixe recherché

Soit $u \in G$, l'application $v \mapsto v \circ u$ est une permutation de G donc

$$N(u(a)) = \inf_{v \in G} \|v(u(a))\| = \inf_{w \in G} \|w(a)\| = N(a)$$

Donc $a = u(a)$

Montrer que si G est un sous groupe compact de $\text{GL}(E)$, alors c'est le conjugué d'un sous groupe de $O(E)$

On introduit $\varphi : \text{GL}(E) \rightarrow \text{GL}(\mathcal{S}(E))$, $u \mapsto (v \mapsto uvu^*)$. C'est un morphisme continu, donc $H = \varphi(G)$ est un sous groupe compact de $\text{GL}(\mathcal{S}(E))$

Soit $C = \{vv^*, v \in G\}$, c'est un compact de $\mathcal{S}^{++}(E)$ en tant qu'image de G par l'application $v \mapsto vv^*$ continue

C est stable par tous les éléments de H . En effet pour $u, v \in G$, on a $\varphi(u)(vv^*) = uvv^*u^* = uv(uv)^* \in C$ car $u, v \in G$ donc $uv \in G$

L'enveloppe convexe K de C est un compact convexe de $\mathcal{S}^{++}(E)$, stable par H car les $\varphi(u)$ sont linéaires

Donc en appliquant Kakutani à K et H on obtient v qui stabilise tous les éléments de H

Donc pour tout $u \in G$, on a $\varphi(u)(v) = v$, i.e. $uvu^* = v$

Soit $w \in \mathcal{S}^{++}(E)$ tel que $w^2 = v$ (qui existe car $K \subseteq \mathcal{S}^{++}(E)$)

Pour $u \in G$, on a donc

$$\begin{aligned}
(w^{-1}uw)(w^{-1}uw)^* &= w^{-1}uww^*u^*(w^{-1})^* \\
&= w^{-1}uw^2u^*(w^*)^{-1} \\
&= w^{-1}uvu^*w^{-1} \\
&= w^{-1}vw^{-1} \\
&= w^{-1}w^2w^{-1} \\
&= \text{id}
\end{aligned}$$

Donc $w^{-1}Gw$ est un sous groupe de $\mathcal{O}(E)$

Détail de certains points

Montrer que φ est continue

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base de $\mathcal{L}(E)$ où $u_{i,j}$ a pour matrice $E_{i,j}$ dans la base $\mathcal{B}$. On ré indexe cette nouvelle base en une base $(u_1, \dots, u_{n^2})$ où $u_k = u_{i,j}$ où $k = ni + j$ est la division euclidienne de k par n . On ré itère le processus une dernière fois pour obtenir $\psi_1, \dots, \psi_{n^4}$ une base de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$
 φ vu comme application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ a des coordonnées polynomiales, elle est donc continue

Détailler pourquoi K est stable par H , et pourquoi il est inclus dans $\mathcal{S}^{++}(E)$

Soit $\psi \in H$ et $v \in K$

v est une combinaison convexe d'éléments de C , donc on a $w_1, \dots, w_k$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ po-

sitifs qui somment à 1 tels que $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i w_i$

Donc comme ψ est linéaire, on a $\psi(v) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \psi(w_i)$, qui est donc une combinaison convexe d'éléments de C car $\psi(C) \subseteq C$, donc on a bien $\varphi(v) \in K$

Et pour $x \in E$, on a $\langle x, v(x) \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle x, w_i(x) \rangle > 0$ donc $v \in \mathcal{S}^{++}(E)$

Montrer que si $w \in \text{GL}(E)$, alors $(w^{-1})^* = (w^*)^{-1}$

On a

$$(w^{-1})^* w^* = (ww^{-1})^* = \text{id}^* = \text{id}$$

cqfd

Version révisions

Soit E un espace euclidien et G un sous groupe compact de $\text{GL}(E)$

On se propose de montrer que si K est un compact convexe non vide de E stable par tout $u \in G$, alors il existe $a \in K$ tel que $\forall u \in G, u(a) = a$

Corollaire : Tout sous groupe compact de $\text{GL}(E)$ est conjugué à un sous groupe de $\text{O}(E)$

1. Montrer que $N(x) = \sup_{u \in G} \|u(x)\|$ est une norme stt convexe sur E (i.e. $N(x+y) = N(x) + N(y) \Rightarrow x$ et y sont positivement liés)
2. Montrer qu'il existe un unique $a \in K$ tel que $N(a) = \inf_{x \in K} N(x)$
3. Montrer que a est le fameux point fixe

On se place dans le cadre du corollaire, soit G un sous groupe compact de $\text{GL}(E)$

Soit $\varphi : \text{GL}(E) \rightarrow \text{GL}(\mathcal{S}(E))$, $u \mapsto (v \mapsto uvu^*)$, soit $H = \varphi(G)$, et soit $C = \{vv^*, v \in G\}$

4. Justifier que H est un sous groupe compact de $\text{GL}(\mathcal{S}(E))$ et que C est un compact de $\mathcal{S}^{++}(E)$
5. Montrer que l'enveloppe convexe K de C est un compact convexe de $\mathcal{S}^{++}(E)$ stable par H
6. Appliquer Kakutani pour obtenir un v stabilisé par tout H et justifier que v admet une racine carré w
7. Montrer que $w^{-1}Gw$ est un sous groupe de $\text{O}(E)$