

Théorème de Fejér

CloudSea

Cadre

Soit f une fonction 2π -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et S_n la somme partielle de sa série de Fourier

On montre que $f_n = \frac{1}{n}(S_0 + \dots + S_{n-1})$ converge uniformément vers f

Recasages :

- [[246 Séries de Fourier]]

Backup :

- [[241 Suites et séries de fonctions]]

- [[209 Approximations de fonctions]]

Référence : 131 DEV

Déroulé du développement

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue 2π -périodique, notons $S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f)e^{ikx}$ la somme partielle de sa série de Fourier

On rajoute à ça le noyau de Dirichlet $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$ et le noyau de Fejér $K_n(x) =$

$$\frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} D_p(x)$$

Montrer que $D_n * f = S_n(f)$

On a

$$\begin{aligned}
D_n * f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x-y) \, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-y)} \, dy \\
&= \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} \, dy \\
&= \sum_{k=-n}^n e^{ikx} c_k(f) \\
&= S_n(f)(x)
\end{aligned}$$

Montrer que $K_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}} \frac{e^{-\frac{inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}} = \frac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = e^{\frac{i(n-1)x}{2}} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Donc pour $-\pi < x < \pi$ non nul, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=-p}^p e^{ikx} &= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{e^{-ipx} - e^{i(p+1)x}}{1 - e^{ix}} \\
&= \frac{1}{1 - e^{ix}} \left(\frac{1 - e^{-inx}}{1 - e^{-ix}} - e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{1 - e^{ix}} \left(e^{\frac{-i(n-1)x}{2}} - e^{ix} e^{\frac{i(n-1)x}{2}} \right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{\frac{-i(n-1)x}{2}} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \\
&= \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Et donc $K_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, qui se prolonge par continuité en 0 par la valeur n

Montrer que K_n est une approximation de l'unité

La formule précédente montre que K_n est positive pour $n \geq 1$

Si on calcule son intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} D_p(x) \, dx \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=-p}^p \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \, dx\end{aligned}$$

Or l'intégrale tout au bout vaut 0 si $k \neq 0$ et 2π sinon

Donc on obtient $\frac{1}{n} n 2\pi$ c'est à dire 2π

Et pour $0 < \delta < \pi$, K_n est paire, donc on a

$$\begin{aligned}I &= \int_{x \in [-\pi, \pi], |x| \geq \delta} K_n(x) \, dx \\ &= 2 \int_{\delta}^{\pi} K_n(x) \, dx \\ &= 2 \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{n} \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \, dx\end{aligned}$$

En majorant $\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)$ par 1 et en minorant $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ par $m = \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$, on obtient

$$I \leq 2 \frac{\pi - \delta}{mn} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Conclure

On a donc

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_n * f = K_n * f$$

Or pour $\varepsilon > 0$, Heine donne un $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Donc

$$\begin{aligned}
|K_n * f(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) f(x-y) \, dy - f(x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) f(x-y) \, dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) K_n(y) \, dy \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) |f(x-y) - f(x)| \, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq \delta} K_n(y) |f(x-y) - f(x)| \, dy + \frac{1}{2\pi} \int_{|y| > \delta} K_n(y) |f(x-y) - f(x)| \, dy \\
&\leq \frac{2\pi\varepsilon}{2\pi} + \frac{\varepsilon}{2\pi} 2\|f\|_{\infty} \\
&= \varepsilon \left(1 + \frac{\|f\|_{\infty}}{\pi} \right)
\end{aligned}$$

Pour n assez grand
Donc on a bien

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_n(f) \xrightarrow{CU} f$$

Version révisions

Soit f une fonction 2π -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et S_n la somme partielle de sa série de Fourier

On se propose de montrer que $f_n = \frac{1}{n}(S_0 + \dots + S_{n-1})$ converge uniformément vers f

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue 2π -périodique, notons $S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}$ la somme partielle de sa série de Fourier

On rajoute à ça le noyau de Dirichlet $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$ et le noyau de Fejér $K_n(x) =$

$$\frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} D_p(x)$$

1. Montrer que $f * D_n = S_n(f)$
2. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, montrer que

$$\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = e^{\frac{i(n-1)x}{2}} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

3. En déduire que $K_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
4. Montrer que K_n est une approximation de l'unité :
 - 4.1 Montrer que $K_n \geq 0$
 - 4.2 Montrer que K_n est d'intégrale 2π
 - 4.3 Montrer que pour tout $\delta > 0$, l'intégrale pour $|x| \geq \delta$ de K_n tend vers 0
5. En déduire la convergence uniforme annoncée (faire le calcul)