Stirling par le TCL

CloudSea

Cadre

Soit (X_n) un échantillon de loi de Poisson de paramètre 1 et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

On applique le TCL à $Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - 1\right)$ pour montrer la formule de Stirling

Recasages :
- [[223 Suites numériques]]
- [[224 Développements asymptotiques]]
- [[235 Interversions de symboles]]
- [[236 Calcul d'intégrales]]
- [[261 Loi d'une variable aléatoire]]
- [[262 Convergences de variables aléatoires]]
- [[264 Variables aléatoires discrètes]]
- [[266 Indépendance]]

Référence : 131 DEV p 585

Déroulé du développement

Introduire un TCL

S_n est la somme de n lois de Poissons indépendantes de paramètre 1, donc suit une loi de Poisson de paramètre n, en particulier $\mathrm{Var}(S_n) = n$

Soit $Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - 1\right)$, le TCL donne que Z_n converge en loi vers Z qui suit une $\mathcal{N}(0,1)$. Donc en déduit que pour tout t $\mathbb{P}(Z_n \geq t) \to P(Z \geq t)$

Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq t)\ \mathbf{d}t \to \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geq t)\ \mathbf{d}t$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_n \geq t) &\leq \mathbb{P}(Z_n^2 \geq t^2) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}(Z_n^2)}{t^2} && \text{(Markov)} \\
&= \frac{1}{t^2}\mathbb{E}\left(\frac{(S_n - n)^2}{n}\right) \\
&= \frac{1}{nt^2}\mathrm{Var}(S_n) \\
&= \frac{1}{t^2}
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(Z_n \geq t)$ est dominée par $\min\left(1, \frac{1}{t^2}\right)$ intégrable indépendante de t
Donc le TCD donne le résultat attendu

Calculer $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geq t)\ \mathbf{d}t$

Z suit une $\mathcal{N}(0,1)$ donc de densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geq t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ \chi_{x \geq t}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ \chi_{x \geq t}\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x && \text{(Fubini positif)} \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq t)\ \mathbf{d}t$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - 1\right) \geq t\right)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S_n \geq t\sqrt{n} + n)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\ \chi_{k \geq t\sqrt{n}+n}\ \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\ \chi_{k \geq t\sqrt{n}+n}\ \mathrm{d}t && \text{(Fubini positif)} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!}\ \chi_{t \leq (k-n)/\sqrt{n}}\ \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!}\ \frac{k-n}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{(k-1)!} - \frac{n^{k+1}}{k!} && \text{(Le terme } k = n \text{ est nul)} \\
&= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\left(\frac{n^{n+1}}{n!} - 0\right) && \text{(Télescopage)} \\
&= \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}
\end{aligned}$$

Conclure

On a donc $\dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, donc on a bien

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Détail de certains points

Montrer que la somme de deux Poisson indépendantes de paramètres λ et μ est une Poisson de paramètre $\lambda + \mu$

Soit X qui suit une poisson de paramètre λ et Y indépendante de X qui suit une poisson de paramètre μ, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i, Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\ e^{-\mu}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Donc $X+Y$ suit bien une Poisson de paramètre $\lambda+\mu$

Version révisions

On se propose de montrer la formule de Stirling

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Soit (X_n) un échantillon de loi de Poisson de paramètre 1 et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, et soit $Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - 1\right)$

1. Montrer que Z_n converge en loi vers Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$
2. En déduire la convergence simple de $F_n(t) = \mathbb{P}(Z_n \geq t)$ vers $F(t) = \mathbb{P}(Z \geq t)$
3. A l'aide d'une inégalité de Markov, montrer que

$$\int_0^{+\infty} F_n(t)\ \mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} F(t)\ \mathrm{d}t$$

4. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} F_n(t)\ \mathrm{d}t = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$$

5. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} F(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

6. En déduire la formule de Stirling