Nombres de Bell

CloudSea

Cadre

Soit B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[|1, n|]$ avec pour convention $B_0 = 1$
On exprime B_n comme la somme d'une série numérique

Recasages :
- [[190 Dénombrement]]
- [[230 Séries numériques]]
- [[243 Séries entières]]

Backup :
- [[235 Interversions de symboles]] a mettre pour illustrer Fubini
- [[241 Suites et séries de fonctions]] a mettre pour illustrer les séries entières

Référence : Oraux X ens algèbre 1

Déroulé du développement

Montrer que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$

Soit E_k l'ensemble des partitions de $[|1, n+1|]$ telles que la partie qui contient $n+1$ est de cardinal $k+1$
Pour construire un élément de E_k, on choisit une partie de $[|1, n+1|]$ de cardinal $k+1$ qui contient $n+1$, ce qui revient à choisir une partie A de $[|1, n|]$ de cardinal k, puis on complète avec une partition des $n-k$ éléments de $[|1, n|] \setminus A$
Donc E_k contient $\binom{n}{k} B_{n-k}$ éléments

Or les E_k forment une partition de l'ensemble des partitions de $[|1, n+1|]$, donc

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \#E_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$ **et** R **son rayon de convergence, montrer que** $R \geq 1$

On va montrer par récurrence que $B_n \leq n!$

$n = 0$ ok

$n \to n+1$
On a

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leq n!(n+1) = (n+1)!$$

Donc R est supérieur au rayon de convergence de la série $\sum z^n$ donc à 1

En dérivant f**, calculer** f **sur** $]-R, R[$

Pour $x \in]-R, R[$, on a $f(x) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}$, donc en dérivant terme à terme on obtient

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n$$

En reconnaissant un produit de Cauchy, on en déduit

$$f'(x) = f(x) e^x$$

Donc $\frac{f'(x)}{f(x)} = e^x$, donc $\ln(f(x)) = e^x + C$, donc $f(z) = e^{e^x + C} = C' e^{e^x}$
Donc sachant que $f(0) = 1$ on obtient $C' = \frac{1}{e}$
Donc finalement

$$f(z) = \frac{1}{e} e^{e^x}$$

Exprimer B_n comme somme d'une série

On a

$$f(z) = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{nx}}{n!} = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(nx)^k}{k!} = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(nx)^k}{n!k!}$$

Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{(nx)^k}{n!k!}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}e^{n|x|} = e^{e^{|x|}} < +\infty$$

Donc on peut appliquer Fubini et obtenir

$$f(z) = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(nx)^k}{n!k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}\right)\frac{x^k}{k!}$$

Donc par unicité du DSE on a pour tout k

$$B_k = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}$$

Version révisions

Soit B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[|1, n|]$ avec pour convention $B_0 = 1$
On se propose de donner une expression de B_n comme la somme d'une série numérique

1. En considérant E_k l'ensemble des partitions de $[|1, n+1|]$ telles que la partie qui contient $n+1$ est de cardinal $k+1$, Montrer que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$
2. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$ et R son rayon de convergence, montrer que $R \geq 1$
3. Montrer que $f'(x) = f(x)e^x$ et en déduire que $f(x) = \frac{1}{e}e^{e^x}$
4. Développer la nouvelle expression de f en série entière (deux fois), faire un Fubini et en déduire que $B_k = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}$