Nilpotence par la trace

CloudSea

Cadre

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, on montre que A est nilpotente ssi $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$

Recasages :
- [[153 Éléments propres]]
- [[156 Trigonalisation et nilpotence]]
- [[162 Systèmes linéaires]]
Backup :
- [[150 Réduction d'endomorphismes]] mettre les résultats intermédiaires pertinents dans le plan

Référence : Carnet de voyage en Algébrie p 27-32

Déroulé du développement

Montrer le sens facile (direct)

Soit A une matrice nilpotente, on a $\mathrm{sp}(A) = \{0\}$ donc on a une matrice T triangulaire avec une diagonale de 0 à laquelle A est semblable
Donc pour tout k, T^k a une diagonale de zéros, donc on a $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(T^k) = 0$

Montrer que A admet une valeur propre nulle

Soit T une matrice triangulaire semblable à A, on a pour tout k $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(T^k)$. Donc comme les valeurs propres sont sur la diagonale des T^k, si $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$ sont les vp de A de multiplicité $m_1, \cdots, m_t$, on a

$$\mathrm{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{t} m_i \lambda_i^k$$

Donc $(m_1, \cdots, m_t)$ est solution du système linéaire

$$(S) : \sum_{i=1}^{t} \lambda_i^k x_i = 0, \quad 1 \leq k \leq t$$

Donc (S) admet une solution non nulle (à savoir $(m_1, \cdots, m_t)$) donc son déterminant est nul
Donc la matrice $B = (\lambda_i^j)$ de taille $t \times t$ est de déterminant nul
Or $\det(B) = \lambda_1 \cdots \lambda_t V$ où V est le déterminant de Vandermonde de $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$. Ce déterminant est non nul car les λ_i sont 2à2 distincts, donc l'un des λ_i est nul

Montrer par récurrence sur n que A est bien nilpotente

$n = 1$ est trivial

$n - 1 \to n$
A admet une valeur propre nulle, donc A est semblable à une matrice B de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

avec $A' \in M_{n-1}(\mathbb{C})$
Le calcul par blocs donne alors

$$B^k = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & A'^k \end{pmatrix}$$

Donc les traces des A'^k sont toutes nulles, donc par hypothèse de récurrence A' est nilpotente
Donc $\chi_{A'} = X^{n-1}$, donc $\chi_A = \chi_0 \chi_{A'} = XX^{n-1} = X^n$, donc A est nilpotente

Détail de certains points

Montrer que la trace est invariante par similitude

Déjà on a $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
En effet

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (BA)_{k,k} \\
&= \operatorname{tr}(BA)
\end{aligned}
$$

Soit A et B deux matrices semblables et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que $A = PBP^{-1}$
On a $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(PBP^{-1}) = \operatorname{tr}(P^{-1}PB) = \operatorname{tr}(B)$

Montrer que si A est nilpotente alors $\chi_A = X^n$ (à faire si il reste du temps à la fin)

A est nilpotente, donc X^n annule A, donc μ_A divise X^n donc $\mu_A = X^k$ pour un certain k
Donc $\operatorname{sp}(A) = \{0\}$ et donc $\chi_A = X^n$

la réciproque est vraie, c'est une conséquence directe de Cayley Hamilton

Version révisions

On se propose de montrer que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est nilpotente ssi $\operatorname{tr}(A^k) = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$

1. Montrer le sen direct en trigonalisant A

On veut montrer la réciproque, soit A qui vérifie $\operatorname{tr}(A^k) = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$

2. Donner un système qui lie les $\operatorname{tr}(A^k)$, les valeurs propres de A et leurs multiplicités
3. En considérant le déterminant de ce système, montrer que A admet une valeur propre nulle

Reste à montrer par récurrence que A est bien nilpotente. $n = 1$ est trivial, faisons $n - 1 \to n$

4. Montrer que A est semblable à une diagonale par blocs $\mathrm{Diag}(0, A')$ où $A' \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ et que les $\mathrm{tr}(A'^k)$ sont toutes nulles
5. Montrer que $\chi_A = X^n$ et en déduire que A est bien nilpotente