

Méthode de Newton

CloudSea

Cadre

On se donne f de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $f' > 0$ et que f admet un zéro en a , et on cherche à approcher numériquement a

Pour ça on considère la suite récurrente $x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

On montre qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x_0 \in [a - \alpha, a + \alpha]$, alors la méthode converge et est d'ordre au moins 2 (1)

Et si on suppose en plus $f'' > 0$, alors la méthode converge pour tout x_0 et est exactement d'ordre 2 (2)

Recasages :

- [[218 Formules de Taylor]]
- [[223 Suites numériques]]
- [[224 Développements asymptotiques]]
- [[226 Suites récurrentes]]
- [[228 Continuité et dérivabilité]]
- [[229 Fonctions monotones et convexes]]

Backup :

- [[219 Extremums]] il est mentionné dans le rapport de jury, faisons le apparaître dans le plan

Référence : Rouvière p 152

Déroulé du développement

Montrer que pour tout x , il existe y tel que $F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(y)}{f'(x)} (x - a)^2$

Soit $x \in \mathbb{R}$, le théorème de Taylor donne y entre x et a tel que

$$0 = f(a) = f(x) + (a - x)f'(x) + \frac{1}{2}(a - x)^2 f''(y)$$

Donc

$$\begin{aligned}(x-a)f'(x) - f(x) &= \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(y) \\ \Leftrightarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a &= \frac{1}{2} \frac{f''(y)}{f'(x)} (x-a)^2 \\ \Leftrightarrow F(x) - a &= \frac{1}{2} \frac{f''(y)}{f'(x)} (x-a)^2\end{aligned}$$

Montrer (1)

Soit I un segment contenant a

Soit $x \in I$, on a y tel que $|F(x) - a| = \frac{1}{2} \frac{|f''(y)|}{f'(x)} |x-a|^2$

Donc en prenant $C = \frac{1}{2} \frac{\max(|f''|)}{\min(f')}$ on a $|F(x) - a| \leq C|x-a|^2$

Donc soit $\alpha > 0$ assez petit pour avoir $\alpha C \leq 1$ et $[x-\alpha, x+\alpha] \subseteq I$

Notons $I_\alpha = [a-\alpha, a+\alpha]$. Pour $x \in I_\alpha$, on a

$$|F(x) - a| \leq C|x-a|^2 \leq C\alpha^2 \leq \alpha$$

Donc I_α est stable par F

Donc si $x_0 \in I_\alpha$, la suite (x_n) est à valeurs dans I_α et $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$

Donc par récurrence, on a

$$C|x_n - a| \leq (C|x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n}$$

Donc la méthode converge et est d'ordre au moins 2

remarque :

Plus I est petit, plus α est petit car on a $I_\alpha \subseteq I$

Mais plus I est grand, plus C est grand et donc plus α est petit

Avec les hypothèses du (1), on doit espérer que le x_0 choisi soit assez proche de a pour que la méthode converge

Montrer (2)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $y \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(y)}{f'(x)} (x - a)^2 \geq 0$, donc à partir du rang 1, (x_n) est minorée par a

Ensuite à partir du rang 1, on a $x_n \geq a$, donc $f(x_n) \geq f(a) = 0$

Donc $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n$, donc (x_n) est décroissante

Donc par théorème de la limite monotone, (x_n) converge. Donc (x_n) converge vers l'unique point fixe de F à savoir a

Donc la méthode converge

Donc pour $n \geq 1$, on a $y_n \in [a, x_n]$ tel que

$$x_{n+1} - a = \frac{1}{2} \frac{f''(y_n)}{f'(x_n)} (x_n - a)^2$$

Or (x_n) est décroissante et tend vers a , donc $y_n \rightarrow a$

Donc

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(y_n)}{f'(x_n)} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)}$$

Donc la méthode est exactement d'ordre 2

Détail de certains points

Détailler la récurrence au (1)

$n = 0$

C'est trivial, ça dit $C|x_0 - a| \leq C|x_0 - a|$

$n \rightarrow n + 1$

On a

$$C|x_{n+1} - a| \leq C^2|x_n - a|^2 = (C|x_n - a|)^2 \leq ((C|x_0 - a|)^{2^n})^2 = (C|x_0 - a|)^{2^{n+1}}$$

cqfd

Version révisions

On se donne f de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $f' > 0$ et que f admet un zéro en a , et on cherche à approcher numériquement a

Pour ça on considère la suite récurrente $x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

1. On se propose de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x_0 \in [a - \alpha, a + \alpha]$, alors la méthode converge et est d'ordre au moins 2
2. Et que si on suppose en plus $f'' > 0$, alors la méthode converge pour tout x_0 et est exactement d'ordre 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, à l'aide d'une formule de Taylor, montrer qu'il existe y entre x et a tel que

$$F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(y)}{f'(x)} (x - a)^2$$

2. Soit I un segment contenant a , montrer qu'il existe $C \geq 0$ tel que $|F(x) - a| \leq C |x - a|^2$
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $I_\alpha = [a - \alpha, a + \alpha] \subseteq I$ soit stable par F
4. Montrer que I_α vérifie l'item 1.

On se met maintenant dans les hypothèses de l'item 2.

5. Montrer que (x_n) est décroissante minorée par a à partir du rang 1
6. En déduire que la méthode converge
7. En réutilisant la question 1. montrer que $\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2}$ admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$ et en déduire que la méthode est d'ordre 2