Lemme de Brauer

CloudSea

Cadre

Pour $\sigma \in S_n$, on note P_σ sa matrice de permutation dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
On montre que σ et σ' sont conjuguées dans S_n ssi P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables dans $M_n(\mathbb{K})$.

Leçons :
- [[103 Conjugaison et groupes quotients]]
- [[105 Groupe symétrique]]
- [[106 Groupe linéaire]]

Références : Carnet de voyage en Algébrie p 34

Déroulé du développement

Le sens facile

L'application $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes de S_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, donc si σ et σ' sont conjugués, soit τ tel que $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$, on a $P_{\sigma'} = P_\tau P_\sigma P_\tau^{-1}$, donc P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.

Un invariant de conjugaison

Pour $\sigma \in S_n$ et $i \in [1, n]$ on défini $m_i(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ^i. On va montrer que $(m_1(\sigma), \cdots, m_n(\sigma))$ est un invariant de conjugaison

Soit γ un j-cycle, montrer que la j-orbite de γ se scinde en $i \wedge j$ orbites dans γ^i

Soient $i' = i/(i \wedge j)$ et $j' = j/(i \wedge j)$, montrons que $\bar{i}$ est d'ordre j' dans $\mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$.
On a $j'i = ij/(i \wedge j) = i'j$, donc $j'\bar{i} = 0$

Et si $s\bar{i} = 0$, on a t tel que $si = tj$, donc en divisant par le pgcd on obtient $si' = tj'$. Or i' et j' sont premiers entre eux, donc j' divise s. Donc $\bar{i}$ est bien d'ordre j'.

Donc si $\gamma = (x_1, \cdots, x_j)$, l'orbite de x_k dans γ^i est $\{x_{k+si}; s \in \mathbb{N}\}$ (les indices sont modulo j) et on a $\overline{k+si} = \overline{k} \Leftrightarrow s\bar{i} = 0 \Leftrightarrow s \in j'\mathbb{Z}$. Donc les orbites de γ^i sont de longueur $j/(i \wedge j)$ donc il y en a $i \wedge j$.

Montrer que les $m_i(\sigma)$ forment un invariant de conjugaison avec un système linéaire bien pensé

Pour $j \in [|1, n|]$, on défini $c_j(\sigma)$ le nombre de j-orbites de σ. On rappelle que c'est un invariant de conjugaison, c'est à dire que σ et σ' sont conjuguées si et seulement si $\forall j \in [|1, n|], c_j(\sigma) = c_j(\sigma')$.

Chaque j-cycle de σ produit $i \wedge j$ orbites dans σ^i, donc on a

$$m_i(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} (i \wedge j) c_j(\sigma)$$

Soit S la matrice des $(i \wedge j)$, montrons que S est inversible
Soit P la matrice des $\delta_{i|j}$ et $D = \mathrm{diag}((\varphi(1), \cdots, \varphi(n)))$, on a

$$({}^tPDP)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} {}^tp_{i,k}\ d_{k,k}\ p_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k|i}\ \varphi(k)\ \delta_{k|j} = \sum_{k|(i \wedge j)} \varphi(k) = i \wedge j$$

Donc ${}^tPDP = S$
Or P est triangulaire sup avec une diagonale de 1 donc inversible, et D est inversible (sur $\mathbb{Q}$), donc S est inversible

Donc comme les $c_j(\sigma)$ sont un invariant de conjugaison, les $m_i(\sigma)$ aussi

Faire le lien entre les $m_i(\sigma)$ et les P_σ et conclure

Soit $\sigma \in S_n$, on va montrer que $m_1(\sigma) = \dim(E_1(P_\sigma))$.
Soient $O_1, \cdots, O_r$ les orbites de σ où $r = m_1(\sigma)$. Soient $u_1, \cdots u_r \in \mathbb{K}^n$ définis par $(u_k)_i = 1$ si $i \in O_k$ et 0 sinon. Les orbites sont disjointes donc les u_k sont libres.
Et pour $X \in E_1(P_\sigma)$, on a $P_\sigma X = X$ donc $\forall i \in [|1, n|], X_i = X_{\sigma(i)}$, donc on a $\lambda_1, \cdots \lambda_r$ tels que $\forall 1 \leq k \leq r, \forall i \in O_k, X_i = \lambda_k$, donc $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k u_k$, donc les u_k forment une base de $E_1(P_\sigma)$, donc $m_1(\sigma) = \dim(E_1(P_\sigma))$.

Donc si $P_\sigma \sim_s P_{\sigma'}$ on a $m_1(\sigma) = m_1(\sigma')$, et de même $(P_\sigma)^i \sim_s (P_{\sigma'})^i$ donc $(P_{\sigma^i}) \sim_s (P_{\sigma'^i})$ donc $m_1(\sigma^i) = m_1(\sigma'^i)$ donc $m_i(\sigma) = m_i(\sigma')$, donc $\sigma \sim \sigma'$

Détail de certains points

Détailler le morphisme du sens facile

Soient $\sigma, \tau \in S_n$, on veut montrer que $P_{\sigma\tau} = P_\sigma P_\tau$
Soit $i \in [|1, n|]$ et e_i le i-e vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a

$$P_\sigma P_\tau e_i = P_\sigma e_{\tau(i)} = e_{\sigma(\tau(i))} = P_{\sigma\tau} e_i$$

Donc par linéarité, pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, on a $P_\sigma P_\tau X = P_{\sigma\tau} X$, donc $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}$

Montrer que les $c_j(\sigma)$ forment un invariant de similitude

On rappelle une formule utile :
Soit $\sigma = (x_1, \cdots x_k)$ un k-cycle de S_n et $\tau \in S_n$, alors $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(x_1), \cdots, \tau(x_k))$ $(*)$
Montrons donc que $\sigma \sim \sigma' \Leftrightarrow \forall j \in [|1, n|], c_j(\sigma) = c_j(\sigma')$

$\Rightarrow$
Soit τ tel que $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$, et soit $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_s$ la décomposition en cycles à supports disjoints de σ
On a alors $\sigma' = \tau\gamma_1 \cdots \gamma_s\tau^{-1} = \tau\gamma_1\tau^{-1} \cdots \tau\gamma_s\tau^{-1}$ or par $(*)$, pour tout k on a $\text{supp}(\tau\gamma_k\tau^{-1}) = \tau(\text{supp}(\gamma_k))$. Donc par bijectivité de τ, les $\tau\gamma_k\tau^{-1}$ sont des cycles à supports disjoints, et ils ont la même longueur que les γ_k. Donc on a bien $c_j(\sigma) = c_j(\sigma')$ pour tout j

$\Leftarrow$
Soient $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_s$ et $\sigma' = \gamma'_1 \cdots \gamma'_s$ les décompositions en cycles de σ et σ' où les γ sont rangés par ordres croissant de longueur de sorte que $|\gamma_i| = |\gamma'_i|$ pour tout i
Soit $i \in [|1, s|]$, notons $\gamma_i = (x_1, \cdots x_k)$ et $\gamma'_i = (x'_1, \cdots, x'_k)$. On définit alors $\tau(x_l) = x'_l$ pour tout l
Les orbites de σ forment une partition de $[|1, n|]$ donc on défini bien une application τ, et les orbites de σ' forment aussi une partition de $[|1, n|]$ donc τ est bijective
Et par construction on a bien $\tau\gamma_k\tau^{-1} = \gamma'_k$ pour tout k, donc $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma'$

Montrer la formule $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ utilisée pour montrer l'inversibilité de S

On considère $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n-e de l'unité
Montrons que pour tout diviseur d de n, $\mathbb{U}_d$ est l'unique sous groupe de $\mathbb{U}_n$ d'ordre d
Déjà pour $z \in \mathbb{U}_d$, on a $z^n = (z^d)^{\frac{n}{d}} = 1$, donc $\mathbb{U}_d$ est bien un sous groupe de $\mathbb{U}_n$, donc c'est bien un sous groupe d'ordre d de $\mathbb{U}_n$

Réciproquement, soit G un sous groupe de $\mathbb{U}_n$ d'ordre d. $\mathbb{U}_n$ est cyclique donc G est cyclique, soit z un générateur de G
On a $z = \omega^k$ où $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Soit $l = k \wedge n$
l divise k, donc $\omega^k = (\omega^l)^{\frac{k}{l}}$ donc $G \subseteq \left\langle \omega^l \right\rangle$. Et Bezout donne $l = uk + nv$, donc

$$\omega^l = (\omega^k)^u(\omega^n)^v = (\omega^k)^u$$

donc $\left\langle \omega^l \right\rangle \subseteq G$, donc $G = \left\langle \omega^l \right\rangle$
Or l divise n, donc ω^l est d'ordre $\dfrac{n}{l}$, donc $d = \dfrac{n}{l}$ donc $l = \dfrac{n}{d}$, donc $G = \left\langle \omega^{\frac{n}{d}} \right\rangle = \mathbb{U}_d$

Donc les éléments d'ordre d de $\mathbb{U}_n$ sont les générateurs de son unique sous groupe d'ordre d. Donc en partitionnant $\mathbb{U}_n$ en fonction de l'ordre de ses élément, on obtient que $\mathbb{U}_n$ est la réunion disjointe des $\mathbb{U}_d^\times$. Donc en regardant les cardinaux, on obtient bien $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$

Questions connexes

Quelques questions posées en oral blanc sur ce développement (il y en avait d'autres que j'ai oubliées)

Quelle est l'importance de ce résultat ?

Ça permet de comprendre des isomorphismes de théorie des représentations, pas besoin d'en dire plus

Quel est le déterminant de P_σ ?

Soit τ une transposition, P_τ est la matrice identité à laquelle on a permuté deux colonnes, donc $\det(P_\tau) = -\det(I_n) = -1$. Donc si $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$, on a

$$\det(P_\sigma) = \det(P_{\tau_1}) \cdots \det(P_{\tau_k}) = (-1)^k = \varepsilon(\sigma)$$

Exo : $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, montrer que si $\mathbf{tr}(P_\sigma) = \mathbf{tr}(P_\tau) = n-2$ alors σ et τ sont conjuguées

La trace donne le nombre de points fixes en caractéristique nulle donc σ et τ sont des transpositions, donc elles sont conjuguées

Version révisions

On se propose de montrer que deux matrices de permutations P_σ et $P_{\sigma'}$ sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ssi les permutations σ et σ' sont conjuguées dans S_n

1. Montrer que $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme et en déduire le sens réciproque

Pour $\sigma \in S_n$, on note $c_j(\sigma)$ le nombre de j-orbites de σ et on défini $m_i(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ^i

2. Soient i, j deux entiers naturels, montrer que $\bar{i}$ est d'ordre j' dans $\mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$
3. Soit γ un j-cycle, montrer que la j-orbite de γ se scinde en $i \wedge j$ orbites dans γ^i
4. En déduire une matrice S telle que $(m_i(\sigma)) = S\ (c_j(\sigma))$
5. Montrer que S est inversible et en déduire que les m_j sont des invariants de conjugaison
6. Montrer que $m_1(\sigma) = \dim(E_1(P_\sigma))$
7. En déduire que si $P_\sigma \sim_s P_{\sigma'}$ alors σ et σ' sont conjuguées