

Isométries du tétraèdre et du cube

CloudSea

Cadre

Soit Δ_4 un tétraèdre régulier et C_6 un cube, on montre que

- $\text{Is}(\Delta_4) \simeq S_4$
- $\text{Is}^+(\Delta_4) \simeq A_4$
- $\text{Is}^+(C_6) = S_4$
- $\text{Is}(C_6) = S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Recasages :

- [[101 Actions de groupe]]
- [[104 Groupes finis]]
- [[105 Groupe symétrique]]
- [[108 Parties génératrices d'un groupe]]
- [[161 Espaces euclidiens]]
- [[181 Convexité dans $\mathbb{R}^n$]]
- [[191 Géométrie]]

Référence : NH2G2 tome 2 p 221

Déroulé du développement

Soit $\mathcal{S} = \{A, B, C, D\}$ l'ensemble des sommets de Δ_4 et $\varphi : \text{Is}(\Delta_4) \rightarrow S_4$ l'action naturelle de $\text{Is}(\Delta_4)$ sur l'ensemble des sommets

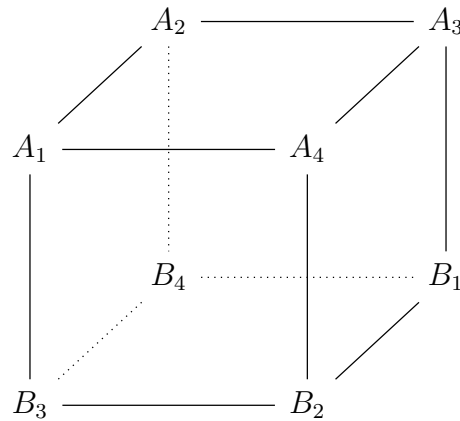
Montrer que φ est un isomorphisme et en déduire $\text{Is}(\Delta_4)$ et $\text{Is}^+(\Delta_4)$

Si $\varphi(f) = \text{id}$, alors f stabilise un repère affine donc $f = \text{id}$. Donc φ est injective
Soit M le milieu de $[A, B]$ et f la réflexion orthogonale par rapport au plan MCD , on a $\varphi(f) = \tau_{A,B}$, donc $\tau_{A,B} \in \text{Im}(\varphi)$. On montre de la même manière que $\text{Im}(\varphi)$ contient les autres transpositions. Donc on a $\text{Im}(\varphi) = S_4$, donc φ est surjective
Donc $\text{Is}(\Delta_4) \simeq S_4$

$\text{Is}^+(\Delta_4)$ est d'indice 2, donc $\text{Is}^+(\Delta_4) \simeq A_4$

Maintenant le cube

Il y a 4 grandes diagonales dans le cube qui réalisent la plus grande distance entre deux sommets du cube. Donc comme les isométries conservent les distances, elles envoient les grandes diagonales sur des grandes diagonales. Soit $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ l'ensemble des diagonales et pour tout $1 \leq i \leq 4$, A_i, B_i les extrémités de D_i .



Soit $f \in \text{Is}(C_6)$, si f fixe un A_i , montrer qu'en fait $f = \text{id}$

Quitte à réordonner supposons que $i = 1$. f fixe donc A_1 et B_1

On a donc $A_1A_2 = f(A_1)f(A_2) = A_1f(A_2)$ or $A_1A_2 \neq A_1B_2$ donc on ne peut pas avoir $f(A_2) = B_2$, donc $f(A_2) = A_2$. On montre de la même manière que f fixe A_4 et B_3 , donc f fixe un repère affine, donc $f = \text{id}$

Soit $\varphi : \text{Is}^+(C_6) \rightarrow S_4$ l'action naturelle de Is^+ sur $\mathcal{D}$, montrer que φ est un isomorphisme et en déduire $\text{Is}^+(C_6) = S_4$

Si $\varphi(f) = \text{id}$, si par l'absurde on a i tel que $f(A_i) \neq A_i$, alors soit s la symétrie centrale du cube, on a $sf(A_i) = A_i$, donc $sf = \text{id}$, donc comme s est une symétrie on a $f = s$, ce qui est absurde car s n'est pas une isométrie directe. Donc φ est injective

Soit M le milieu de $[A_1, A_2]$ et P de $[B_1, B_2]$, alors la rotation d'angle π autour de la droite (MP) s'envoie par φ sur τ_{D_1, D_2} . On montre de la même manière que $\text{Im}(\varphi)$ contient les autres transposition, et que donc φ est surjective

Donc $\text{Is}^+(C_6) = S_4$

Déterminer $\text{Is}(C_6)$

Soit s la symétrie centrale de C_6 et $\varphi : \text{Is}^+(C_6) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Is}(C_6)$, défini par $\varphi(f, 0) = f$ et $\varphi(f, 1) = fs$

s commute avec tout le monde, donc φ est bien un morphisme

Ensuite $\varphi(f, k)$ est dans Is^+ ssi $k = 0$, donc si $\varphi(f, k) = \varphi(g, l)$, on a $k = l$, puis en composant (ou pas) par s on obtient $f = g$, donc φ est injective

Et soit $f \in \text{Is}$, si $f \in \text{Is}^+$ on a $f = \varphi(f, 0)$, sinon $f = \varphi(fs, 1)$ donc φ est surjective

Donc φ est bien un isomorphisme

Version révisions

Soit Δ_4 un tétraèdre régulier et C_6 un cube, on se propose de montrer que

- $\text{Is}(\Delta_4) = S_4$
- $\text{Is}^+(\Delta_4) = A_4$
- $\text{Is}^+(C_6) = S_4$
- $\text{Is}(C_6) = S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

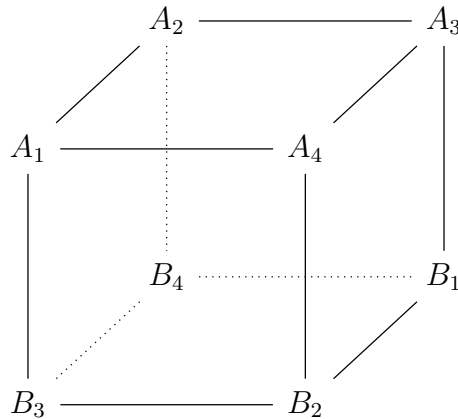
Commençons par Δ_4

Soit $\mathcal{S} = \{A, B, C, D\}$ l'ensemble des sommets de Δ_4 et $\varphi : \text{Is}(\Delta_4) \rightarrow S_4$ l'action naturelle de $\text{Is}(\Delta_4)$ sur l'ensemble des sommets

1. Montrer que φ est injective
2. Montrer que $\text{Im}(\varphi)$ contient les transposition et en déduire que φ est surjective. Cela montre que $\text{Is}(\Delta_4) = S_4$
3. En raisonnant sur l'indice, montrer que $\text{Is}^+(\Delta_4) = A_4$

Maintenant faisons C_6

Soit $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ l'ensemble des diagonales et pour tout $1 \leq i \leq 4$, A_i, B_i les extrémités de D_i .



4. Montrer que si $f \in \text{Is}(C_6)$ fixe un sommet, alors $f = \text{id}$
 Soit $\varphi : \text{Is}^+(C_6) \rightarrow S_4$ l'action naturelle de Is^+ sur $\mathcal{D}$
5. Soit $f \in \ker(\varphi)$, montrer que si $f \neq \text{id}$, alors $sf = \text{id}$ où s est la symétrie centrale du cube, en déduire que f est injective
6. Comme toute à l'heure, montrer que $\text{Im}(\varphi)$ contient les transpositions et en déduire que $\text{Is}^+(C_6) = S_4$
7. Montrer que $\varphi : \text{Is}^+(C_6) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Is}(C_6)$ défini par $\varphi(f, \varepsilon) = fs^\varepsilon$ est un isomorphisme