

Inégalité de Hoeffding

CloudSea

Cadre

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et centrées. On suppose qu'il existe une suite de réels > 0 (c_n) telle que $|X_n| \leq c_n$ p.s.

On montre que pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2} \right)$$

Application :

Soit $\alpha > 0$, on suppose qu'il existe $\beta > 0$ tel que

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 \leq n^{2\alpha-\beta}$$

On a alors la convergence presque sûre vers 0 de S_n/n^α

Recasages :

- [[262 Convergences de variables aléatoires]]
- [[266 Indépendance]]

Références : Les 40 dev de Brenis

Déroulé du développement

Dans toute la suite, on se donne (X_k) une suite de variables aléatoires centrées indépendantes

Montrer que si $|X| \leq 1$ p.s. alors $L_X(t) \leq \exp \left(\frac{t^2}{2} \right)$

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1, 1]$, on a la combinaison convexe

$$tx = \frac{1-x}{2}(-t) + \frac{1+x}{2}t$$

Donc par convexité de l'exponentielle, on a

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t$$

Soit X une variable aléatoire réelle centrée telle que $|X| \leq 1$ p.s.

Pour $u \in \mathbb{R}$, uX est bornée p.s., donc $\exp(uX)$ aussi, donc elle est intégrable, donc X admet une transformée de Laplace L_X

On a donc

$$\begin{aligned} L_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) \\ &\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}((1-X)e^{-t}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}((1+X)e^t) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-t} + e^t) \\ &= \cosh(t) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} \\ &= \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ \lambda\alpha + \mu\beta = u_1 \end{cases}$$

Montrer Hoeffding

On se fixe $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

L'exponentielle est continue donc mesurable donc les $\exp(tX_k)$ sont indépendantes

Pour $k \in \mathbb{N}$, $\frac{X_k}{c_k}$ est centrée et ≤ 1 p.s. donc par le lemme, on a

$$\begin{aligned}
L_{S_n}(t) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(t \sum_{k=1}^n X_k \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n \exp(tX_k) \right] \\
&= \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\exp \left(tc_k \frac{X_k}{c_k} \right) \right] \\
&\leq \prod_{k=1}^n \exp \left(\frac{c_k^2 t^2}{2} \right) \\
&= \exp \left(\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2 \right)
\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(\exp(tS_n) > \exp(t\varepsilon))$
Donc par inégalité de Markov, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) &\leq \mathbb{E} \left[\frac{\exp(tS_n)}{\exp(t\varepsilon)} \right] \\
&= \exp(-t\varepsilon) \mathbb{E}(\exp(tS_n)) \\
&\leq e^{-t\varepsilon} \exp \left(\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2 \right) \\
&= \exp \left(\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2 - t\varepsilon \right)
\end{aligned}$$

On s'intéresse donc au trinôme $\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2 - t\varepsilon$

Il admet un minimum atteint en $t_{\min} = \frac{\varepsilon}{\sum_{k=1}^n c_k^2}$ à savoir $-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}$

On en déduit donc

$$P(S_n > \varepsilon) \leq \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2} \right)$$

En appliquant le même résultat à $(-X_n)$, on obtient

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) + \mathbb{P}(-S_n > \varepsilon) \leq 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2} \right)$$

Application : Une convergence presque sure

Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, Hoeffding donne

$$\mathbb{P}(|S_n| > n^\alpha \varepsilon) \leq 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^2 n^{2\alpha}}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2} \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{n^\beta \varepsilon^2}{2} \right)$$

Donc la série des $\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n^\alpha} \right| > \varepsilon \right)$ converge

Donc par théorème de Borel Cantelli, on a

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} \left(\left| \frac{S_m}{m^\alpha} \right| \leq \varepsilon \right) \right) = 1$$

Donc l'événement $A_\varepsilon = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} \left(\left| \frac{S_m}{m^\alpha} \right| \leq \varepsilon \right)$ est presque sur

Donc comme $\mathbb{Q}_+^*$ est dénombrable, l'événement $\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} A_\varepsilon$ est lui aussi presque sur

Donc presque sûrement on a

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists n \geq 1, \forall m \geq n, \left| \frac{S_m}{m^\alpha} \right| \leq \varepsilon$$

Donc $\frac{S_n}{n^\alpha}$ converge presque sûrement vers 0

Version révisions

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et centrées. On suppose qu'il existe une suite de réels > 0 (c_n) telle que $|X_n| \leq c_n$ p.s.

On se propose de montrer l'inégalité de Hoeffding : pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2} \right)$$

Application :

Soit $\alpha > 0$, on suppose qu'il existe $\beta > 0$ tel que

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 \leq n^{2\alpha-\beta}$$

On a alors la convergence presque sûre vers 0 de S_n/n^α

1. Montrer sans calcul que pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1, 1]$

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t$$

2. Soit X une variable aléatoire centrée telle que $|X| \leq 1$ p.s. Montrer que X admet une transformée de Laplace et que

$$L_X(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

3. En appliquant la question précédente à des variables aléatoires bien choisies, montrer que

$$L_{S_n}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2\right)$$

4. Avec une inégalité de Markov, montrer que

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \left(\sum_{k=1}^n c_k^2\right) - t\varepsilon\right)$$

5. En déduire l'inégalité de Hoeffding

Maintenant l'application

6. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, la famille des $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n^\alpha}\right| > \varepsilon\right)$ est sommable

7. En appliquant Borel Cantelli, montrer que $\frac{S_n}{n^\alpha}$ converge presque sûrement vers 0